Tarea núm. 13

Para el viernes, 13 nov 2009

Definiciones

Sea $V = \mathbb{R}[x, y]$ el espacio de polinomios en dos variables, x y y, con coeficientes reales. Se define **el Laplaciano** $\Delta : V \to V$ como $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial y^2$. Un polinomio $p \in V$ es **armónico** si $\Delta p = 0$. Se denota el espacio de los polinomios armónicos por H. Un polinomio $p(x, y) \in V$ es **homogeneo de grado** d si satiface $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d p(x, y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se denota el conjunto de los polinomios homogeneos de grado d por V_d. Luego se define $H_d = H \cap V_d$ (polinomios armónicos homogeneos de grado d).

En esta tarea estudiamos el espacio H.

Problemas

1. Demuestra que $V_d \subset V$ es un subespacio vectorial de dimensión $d + 1$, con base
$$x^d, x^{d-1}y, x^{d-2}y^2, \ldots, y^d.$$

2. Demuestra que $V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$. Es decir: cada elemento de V se puede expresar, de manera única, como suma de elementos de los V_d.

3. Definimos en V un producto escalar al declarar a la base de los monomios $x^a y^b$ como base ortogonal, con $\|x^a y^b\|^2 = a!b!$.

   Demuestra que con respecto a este producto escalar el adjunto del operador de la derivada pacial $\partial/\partial x$ es el operador de multiplicación por x. Es decir, para todo $p, q \in V$,
$$\langle \frac{\partial p}{\partial x}, q\rangle = \langle p, xq\rangle.$$

   Mismo para $\partial/\partial y$.

4. Demuestra que el adjunto de Δ es el operador de multiplicación por $r^2 = x^2 + y^2$.

5. Demuestra que $H = \bigoplus_{d=0}^{\infty} H_d$.

6. Demuestra que $V_d = H_d \oplus r^2 V_{d-2}$, $d \geq 2$ (suma directa ortogonal) y usa esto para calcular la dimensión de H_d.

   Sugerencia: ver problema 3 del último examen parcial.

7. Concluye del último problema la descomposición ortogonal
$$V_d = H_d \oplus r^2 H_{d-2} \oplus r^4 H_{d-4} \oplus \ldots.$$

8. Encuentra polinomios armónicos h_5, h_3, h_1 tal que $x^5 = h_5 + r^2 h_3 + r^4 h_1$.

9. Encuentra una base de H_d, $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.