Material para el examen parcial 1

(17 oct, 2009)

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas de todos los siguientes términos, y conocer ejemplos concretos de cada uno.

Producto escalar/hermitiano, espacio euclideano/hermitianos, norma, vectores/subespacios ortogonales, el ángulo entre dos vectores, bases ortonormales/unitarios, el proceso de Gram-Schmidt, una isometría (entre espacios euclideanos/hermitianos), proyección ortogonal en subespacio, complemento ortogonal, el adjunto de un operador, operador autoadjunto/anti-autoadjunto, matriz ortogonal/unitaria/hermitiana; forma cuadrática; complexificación/realificación de un espacio vectorial real/complejo; mismo para transfromación lineal. Suma directa de espacios/subespacios vectoriales, subespacio invariante, suma directa de operadores, el dual de un espacio vectorial/operador; anulador de un subespacio.

Teoremas:

Hay que saber las demostraciones de los siguientes teoremas y sus corolorios.

1. Todo conjunto ortonormal en un espacio euclideano se puede completar a una base ortonormal.
2. La desigualdad de Cauchy-Schwartz: si v, w son dos vectores en un espacio euclideano o hermitiano, entonces $|(v, w)| \leq \|v\|\|w\|$ con igualdad ssi los dos vectores son linealmente dependientes.
3. El teorema de representación de Riesz: para todo funcional lineal α en un espacio euclideano o hermitiano V, existe un único vector $w \in V$ tal que $\alpha(v) = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in V$.
4. Existencia y unicidad de la adjunta: dado un operador lineal $T : V \to W$ entre espacios euclideanos o hermitianos, existe un único operador $T^* : W \to V$ que satisface $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ para todo $v \in V, , w \in W$.
5. Todo operador autoadjunto en un espacio euclideano (resp. hermitiano), es diagonalizble mediante una base ortonormal (resp. unitaria).
6. Dos espacios vectoriales euclideanos (resp. hermitianos) son isométricos ssi tienen la misma dimensión.
7. Todo operador lineal en un espacio vectorial complejo es triangulizable.

Problemas:

Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

1. Cierto o Falso
   a) Todo operador lineal T en $\mathbb{R}^2$ con $\det(T) = 1$ es una isometría.

b) Todo operador lineal diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ es autoadjunto.

c) $8x^2 + 22xy + 15y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

d) Un espacio euclideano V está generado por un subconjunto $G \subset V$ si para todo $\mathbf{v} \in V$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in G$ implica $\mathbf{v} = 0$.

e) Todo operador lineal en $\mathbb{R}^3$ admite un subespacio vectorial 2-dimensional invariante.

f) Si T es un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ entonces T y T^* tienen el mismo número de valores propios.

g) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal auto-adjunto invertible y $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio invariante. Entonces los operadores lineales inducido en W y su complemento ortogonal son también invertibles.

h) Todo operador lineal en $\mathbb{R}^n$ admite un subespacio vectorial invariante no trivial (distinto de $\mathbb{R}^n$ o $\{0\}$).

Nota: la respuesta depende de n.

i) Todo operador lineal en $\mathbb{C}^n$ es triangulizable.

j) La matriz de un operador autoadjunto en $\mathbb{R}^2$ con respecto a cualquer base es una matriz simétrica.

k) La matriz de un operador autoadjunto en $\mathbb{R}^2$ con respecto a cualquer base ortonormal es una matriz simétrica.

l) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Entonces la ecuación $T\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ssi $\langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $T^*\mathbf{w} = 0$.

m) Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ es un operador autoadjunto y $V \subset \mathbb{R}^7$ es un subespacio T-invariante, entonces existe un subespacio T-invariante $V' \subset \mathbb{R}^7$ tal que $\mathbb{R}^7$ es la suma directa de V y V'.

n) La suma directa de dos operadores diagonalizables es diagonalizable.

ñ) La suma de dos operadores diagonalizables es diagonalizable.

o) El complemento ortogonal del kernel de un operador lineal T en $\mathbb{R}^7$ es T^*-invariante.

p) Un conjunto linealmente independiente de vectores propios de un operador auto-adjunto en un espacio euclideano es un conjunto ortogonal.

q) Todo operador lineal en $\mathbb{C}^7$ con valores propios reales es autoadjunto.

r) Para toda base de $\mathbb{C}^n$ existe un producto hermitiano en $\mathbb{C}^n$ tal que esta base es unitaria.

s) Si un operador T en un espacio hermitiano es diagonalizable, entonces su adjunta T^* tambien es diagonalizable.

2. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador dado por $T(x, y) = (x + iy, y - ix)$. Encuentra una matriz unitaria U tal que UAU^{-1} es diagonal, donde A es la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

3. Sea $T : V \to V$ un operador lineal y A la matriz de T con respecto a una base en V. Demuestra que A es semejante a una matriz diagonal ssi existe en V una base de vectores propios de T.
4. Si T es una transformación lineal entre espacios euclideanos (o hermitianos), entonces la imagen de T es el complemento ortogonal del kernel de la adjunta de T.
5. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios *distintos* de un operador lineal T, con vectores propios asociados $v_1, \ldots, v_k$ (es decir, los v_i son vectores no nulos y $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$). Demuestra que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.
6. Dado un operador lineal T en un espacio vectorial se define un operador lineal $\tilde{T}$ en $\mathrm{End}(V)$ (el espacio vectorial de todos lo operadores lineales en V) por la fórmula $\tilde{T}(S) = TS$. Encuentra una relación entre las determinantes de $\tilde{T}$ y T.
7. Se define la *traza* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ como la suma de los elementos en la diagonal: $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestra lo siguiente:
   a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
   b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   c) Usando el inciso anterior, demuestra que se puede definir la traza de un operador lineal como la traza de la matriz que le representa en una base; es decir, dicha traza no depende de la base seleccionada para representar el operador.
   d) Sea T un operador lineal. Expresa $\mathrm{tr}(T)$ en términos de uno de los coeficientes del polinomio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$.

      Nota: esto da una demostración alternativa del inciso anterior.)
   e) Sea V un espacio euclideano (resp. hermitiano). Demuestra que la fórmula $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$ define en $\mathrm{End}(V)$ un producto escalar (resp. hermitiano).
   f) Usando la notación y el producto escalar del inciso anterior, encuentra el complemento ortogonal en $\mathrm{End}(V)$ del subespacio de los operadores autoadjuntos. (Respuesta: los operadores anti-autoadjuntos).
   g) Cierto o falso: existen dos matrices A, B, $n \times n$ con coeficientes complejos, tal que $AB - BA$ es la matriz identidad.

      Suegerencia: tomar la traza de ambos lados de la ecuación $AB - BA = I$.
8. Para cualquer dos operadores lineales T_1, T_2,
   a) $\mathrm{tr}(T_1 \oplus T_2) = \mathrm{tr}(T_1) + \mathrm{tr}(T_2)$,
   b) $\det(T_1 \oplus T_2) = \det(T_1)\det(T_2)$.
   c) Expresa el polinomio característico de $T_1 \oplus T_2$ en términos de los polinomios carateterístico de T_1 y T_2, y deriva los dos incisos anteriores como consecuenncia de esta expresión.
9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador dado por $T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ y sea A la matriz de T con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^3$.
   a) Encuentra A, demuestra que es invertible y encuentra su inversa.
   b) Demuestra que T es autoadjunto (con respecto al producto punto usual en $\mathbb{R}^3$).

c) Encuentra el polinomio caracteristico de T y sus valores propios.

d) Encuentra una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ de vectores propios de T.

e) Encuentra una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que $PAP^{-1} = D$.

f) Encuentra los subespacio T-invariantes $W \subset \mathbb{R}^3$.

10. Demuestra que un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio eulideano es linealmente independiente. Es decir, si V es un espacio euclideano y $C \subset V$ es un subconjunto que satisface (1) $\mathbf{v} \in C \implies v \neq 0$, y (2) $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in C, \mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \implies \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 0$, entonces C es un conjunto linealmente independiente. (Nota: puedes suponer que V es de dimensión finita y C es un conjunto finito, pero no es necesario).

11. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$ (la desigualdad de Parseval).

12. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial hermitiano. Demuestrra: si T conmuta con su adjunta ($TT^* = T^*T$) entonces T y T^* tienen los mismos vectores propios, y los correspondientes valores propios son conjugados.

13. Sea V el espacio de las matrices antisimétricas 3×3 con entradas reales.

    a) Demuestra que V es un subespacio vectorial 3 dimensional del espacio de todas las matrices 3×3 con entradas reales.

    b) Para dos elementos $A, B \in V$ se define $\langle A, B \rangle = -\mathrm{tr}(AB)/2$. Demuestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en V y encuentra una base ortonormal en V.

    Nota: esta es esencialmente la definición en el problema 7e arriba, excepto un extraño factor de 1/2.

    c) Para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se define $A_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $A_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (producto cruz, o vectorial). Demuestra que $A_{\mathbf{v}} \in V$ (o sea, $A_{\mathbf{v}}$ es antisimétrico).

    d) Demuestra que $\mathbf{v} \mapsto A_{\mathbf{v}}$ define una isometría entre $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar estandar) y V (con el producto escalar definido en el primer inciso de este poroblema).

    Nota: esto explica el factor de 1/2 en la definición del producto escalar en V.

    e) Demuestra: para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $A_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}} = A_{\mathbf{v}}A_{\mathbf{w}} - A_{\mathbf{w}}A_{\mathbf{v}}$.

    f) Para cada $A \in V$ se define el operador lineal $T_A : V \to V$ por $T_A(B) = AB - BA$. Demuestra que T_A es antisimétrico.

    g) Encuentra los valores y vectores propios de la complexificación de T_A en términos de las entradas de A (los 3 números $a = A_{12}$, $b = A_{13}$, $c = A_{23}$).

14. Este último ejercicio es opcional, pero vale mucho la pena hacerlo, ya que es *muy* bonito y da una ilustración del poder de los conceptos aprendidos en este curso.

a) Dados n escalares $x_1, \ldots, x_n$ (elementos de un campo) se define *la determinante de Vandermonde* (1735-1796) como

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i<j}(x_j - x_i)$ (el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$, donde $1 \le i < j \le n$).

Por ejemplo, para $n = 2$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Sugerencia: es posible verificar directamente esta fórmula (digamos por inducción), pero es tedioso; una idea mas interesante es la siguiente: fijamos $n-1$ valores distintos $x_2, \ldots, x_n$. Demuestra que ambas funciones, $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$, consideradas como funciones de x_1 (con los $n-1$ escalares $x_2, \ldots, x_n$ como parámetros), son polinomios de grado $n-1$, con $n-1$ raíces en común. Demuestra ahora que dos polinomios de grado $n-1$ con los mismos $n-1$ raices son múltiplo uno del otro.

Nota: este problema apareció en la guia del estudio para el examen final del curso de álgebra lineal I en el semestre pasado (pero sin la sugerencia que doy aora). Si no lo hiciste entonces tienes ahora otra oprotunidad.

b) Consideramos una matriz $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ cuyas filas son n vectores $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^n$ que forman un conjunto ortogonal (con respecto al producto hermitiano canónico). Demuestra: $|\det(B)| = \Pi_i \|w_i\|$.

Sugerencia: $|\det(B)|^2 = \det(BB^*)$ y BB^* es una matriz cuya entrada ij es $\langle w_i, w_j\rangle$, así que cuando $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es ortogonal la matriz BB^* es diagonal.

Reto: encuentra una interpretación geométrica de este inciso.

c) Demuestra: si A es una matriz $n \times n$ cuyas filas son n vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$, entonces $|\det(A)| \le \Pi_i \|v_i\|$, con igualdad ssi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal (la desigualdad de Hadamard).

Sugerencia: define w_k como la proyección ortogonal de v_k sobre el complemento ortogonal del espacio generado por $v_1, \ldots, v_{k-1}$ (esto es esencialmente el proceso de Gram-Schmidt, excepto que los w_k no están normalizados y no estamos suponiendo que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente). Demuestra que $\|w_k\| \le \|v_k\|$ con igualdad ssi v_k es ortogonal a $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Sea B la matriz con filas $w_1, \ldots, w_n$. La fila k de A se obtiene de la fila k de B al sumarla una combinación lineal de las primeras $k-1$ filas, así que $\det(A) = \det(B)$. Ahora aplica a B el inciso anterior.

Nota: esta desigualdad es una generalización de un resultado geométrico elemental: entre todos los paralelogramos en el plano con las mismas longitudes de aristas, el rectángulo tiene el área mayor.

d) Dados n puntos sobre un círculo de radio 1 en el plano, consideramos el producto p_n de todas las distancias entre pares distintos de estos puntos (un total de $n(n-1)/2$ distancias). Demuestra: $p_n \leq n^{n/2}$ con igualdad ssi los puntos forman los n vértices de un polígono regular.

Sugerencia: denota los puntos por n números complejos unitarios $z_1, \ldots, z_n$ y forma la determinante de Vandermonde asociada. Para un polígono regular los puntos son $z_1, \omega z_1, \omega^2 z_1, \ldots, \omega^{n-1} z_1$, donde $\omega = e^{i2\pi/n}$ (los n raíces de la ecuación $z^n = z_1^n$).

e) Dado cualquer subconjunto acotado $K \subset \mathbb{R}^2$ y n natural, se define $D_n(K)$ como el supremo (máximo, si K es cerrado) del promedio geométrico de las distancias entre pares de puntos en subconjuntos de K con n elementos; es decir, $D_n(K) = (P_n)^{2/n(n-1)}$, donde $P_n = \sup\{\Pi_{i<j}|z_i - z_j| \mid z_1, \ldots, z_n \in K\}$.

Demuestra que el limite $D_\infty(K) := \lim_{n\to\infty} D_n(K)$ existe y que si K es un disco de radio R, entonces $D_\infty(K) = R$.

Nota: $D_\infty(K)$ es el *diámetro transfinito* de K, definido por M. Fekete en 1923. Así que el diámetro transfinito de un disco es su radio... Para más información acerca de este interesante concepto les recomendo la liga *http://eom.springer.de/t/t093670.htm.*