Segundo Examen Final

11 ene, 2010

NOTAS:

1. Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

2. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica (a menos que se indica otra cosa).

PARTE A *(60 puntos)*

Hay que responder a 12 de los siguientes 15 incisos (si haces más, se consideran los mejores 12).

Hay que responder a cada inciso con "Cierto" o "Falso". Después, en caso de "Cierto", hay que dar una explicación **breve**, *no demostración completa (por ejemplo, mencionar un resultado general visto en el curso que implica el inciso). En caso de "Falso", solo hay que dar un contra-ejemplo, sin mayores explicaciones.*

1. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son dos matrices ortogonales entonces son similares.
2. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son dos matrices ortogonales con la misma determinante entonces son similares.
3. Si A es una matriz ortogonal entonces todos sus entradas tienen valor absoluto ≤ 1.
4. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son dos matrices similares entonces tienen el mismo polinomio característico.
5. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son dos matrices con el mismo polinomio característico entonces son similares.
6. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ son dos matrices simétricas con el mismo polinomio característico entonces son similares.
7. Si una matriz $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ es nilpotente entonces 0 es su único valor propio.
8. Si 0 es el único valor propio de una matriz $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ entonces A es nilpotente.
9. Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz hermitiana entonces sus entradas en el diagonal son reales.
10. Si $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ son dos matrices hermitianas tal que una de ellas (por lo menos) es positiva definida, entonces existe una matriz invertible $P \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $PA\bar{P}^t$ y $PB\bar{P}^t$ son ambas diagonales.
11. Toda matriz $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ es similar a una matriz triangular.
12. No existe una matriz $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que
$$A^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
13. Si $J \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisface $J^2 = -I$ entonces n es par.
14. Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{u'_1, \ldots, u'_n\}$ dos bases unitarias de $\mathbb{C}^n$ y T un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ tal que $T(u_i) = u'_i$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces T es unitario.
15. Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisface $A^2 = A$ entonces A es diagonalizable.

PARTE B *(20 puntos)*

Sea $W \subset \mathbb{C}^3$ el subespacio generado por $(i, 0, 1)$, $(0, i, 2)$.

1. (10 pts) Encuentra una base unitaria para W.
2. (2 pts) Encuentra una base para $W^\perp$.
3. (8 pts) Encuentra las proyecciones ortogonales de $(1, 0, 0)$ sobre W y $W^\perp$.

PARTE C *(20 puntos)*

Resolver 2 de los siguientes 3 problemas (si haces todos, se considera los mejores 2).

1. Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana ($\bar{A}^t = A$). Demuestra:
   a) Todos los valores propios de A son reales.
   b) Vectores propios de A que corresponden a valores propios distintos son ortogonales.
   c) Existe una base unitaria de $\mathbb{C}^n$ de vectores propios de A.

2. Formula y demuestra el teorema de Cayley-Hamilton.

3. Sea $V \subset Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices anti-hermíticas de traza cero (las matrices 2×2 con entradas complejas que satisfacen $\bar{A}^t = -A$, $\mathrm{tr}(A) = 0$).
   a) Demuestra que V no es un subespacio vectorial complejo de $Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$, sino un subespacio vectorial real, de dimensión 3.
   b) Para dos elementos $A, B \in V$ se define $\langle A, B\rangle = -\mathrm{tr}(AB)$. Demuestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en V.

   Nota: en los siguientes 2 incisos se usa este producto escalar.

   c) Encuentra una base ortonormal para V.
   d) Para cada $A \in V$ se define $T_A(B) = AB - BA$. Demuestra que $T_A(B) \in V$ y que $T_A : V \to V$ es un operador lineal antisimétrico.
   e) Sea
   $$D = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
   Encuentra los valores y vectores propios de la complexificación de T_D en términos de t.

   Sugerencia: $[D, D] = 0$. Luego considera $[D, B]$ y $[D, B^t]$ para $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.