Exámen parcial 2 – soluciones

Viernes, 22 mayo, 2009

1. (20 pts) Encuentra una base para el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w &= 0 \\ 5x+6y+7z+8w &= 0 \end{cases}$$

▷ Llevamos la matriz de coeficientes a su forma esclonada canónica por equivalencia de filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

así que se puede tomar z, w como variables libres. Tomando $z = 1, w = 0$ obtenemos $x - 1 = 0, y + 2 = 0 \implies x = 1, y = -2$, luego tomando $z = 0, w = 1$ obtenemos $x - 2 = 0, y + 3 = 0 \implies x = 2, y = -3$, así que una base para el espacio de soluciones es

$$v_1 = (1, -2, 1, 0), \quad v_2 = (2, -3, 0, 1).$$

□

2. (20 pts) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestra que T es invertible si y solo si para cada conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$, $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ es linealmente independiente.

▷ Sea T invertible, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linealmente independiente y demostramos que $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ es linealmente independiente. Sean $c_1, \ldots, c_n$ escalares tales que $\sum_i c_i T v_i = 0$. Como T es lineal $\implies T(\sum_i c_i v_i) = \sum_i c_i T v_i = 0 \implies \sum_i c_i v_i = 0$ (porque T es inyectiva) $\implies c_1 = \ldots = c_n = 0$(porque $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente $\implies \{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ es linealmente independiente.

Suponemos ahora que T manda conjuntos linealmente independientes a conjuntos linealmente independientes. Para ver que T es invertible basta ver que $ker(T)$ es trivial. Sea $v \in ker(T)$. Si $v \neq 0$ entonces $\{v\}$ es un conjunto linealmente independiente, así que, por hipótesis, $\{Tv\}$ es linealmente indpendiente $\implies Tv \neq 0$, contradiciendo $v \in ker(T)$, así que $ker(T) = \{0\}$. □

3. (60 pts) Sea $V \subset \mathbb{R}[x]$ el espacio de polinomios de grado ≤ 3. Sea $D : V \to V$ la derivada, $D : p(x) \mapsto p'(x)$.

   a) Encuentra una base para el kernel y la imagen de D.

   ▷ El kernel de D son los polinomios constantes, así que podemos tomar como base para $ker(D)$ el polinomio constante 1. La imagen son los polinomios de grado ≤ 2, así que podemos tomar como una base para $Im(D)$ los tres polinomios $\{1, x, x^2\}$. □

   b) Encuentra los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $D - \lambda I$ es invertible, y para tales valores encuentra la inversa. (Nota: I es la transformación identidad $V \to V$).

   ▷ Una manera de hacer este ejercicio es notar que $D^4 = 0$ y usar la observación (hecha en clase) que si N es un operador lineal *nilpotente* (una potencia de N se anula) $I - N$ es invertible, con inversa dada por la suma (finita)

$$(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + \ldots.$$

   (Esto está inspirado obviamente por la fórmula $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$).

En nuestro caso, tenemos que D no es invertible (ya que tiene kernel no trivial) y que para $\lambda \neq 0$ que $D - \lambda I = (-\lambda)(I - D/\lambda)$, así que $D - \lambda I$ es invertible con inversa dada por

$$(D - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - D/\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I + \frac{D}{\lambda} + \frac{D^2}{\lambda^2} + \frac{D^3}{\lambda^3}).$$

Usando esta expresión podemos facilmente calcular la matriz de $(D - \lambda I)^{-1}$ en la base $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$[(D - \lambda I)^{-1}]_\alpha = -\frac{1}{\lambda^4}\begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 & 2\lambda & 3 \\ 0 & \lambda^3 & 2\lambda^2 & 6\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

□

c) Encuentra los valores propios de D y sus vectores propios asociados.

▷ Del inciso anterior, el único valor propio de D es $\lambda = 0$; los vectores propios asociados son los polinomios constantes (distintos de 0). □

d) Encuentra las matrices A, B que representan a D con respecto a las bases (a) $\{1, x, x^2, x^3\}$ (para A), (b) $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ (para B).

▷ (a) Sea $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$. Tenemos que $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$ y $D(x^3) = 3x^2$, así que

$$[D]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Para $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ tenemos que $D(1) = 0$, $D(1 + x) = 1$, $D(1+x+x^2) = 1+2x = 2(1+x)-1$, $D(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2 = 3(1+x+x^2)-(1+x)-1$, así que

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Encuentra una matriz 4×4 invertible P tal que $A = PBP^{-1}$, donde A, B son las matrices del inciso anterior.

▷ Sea $S_\alpha : \mathbb{R}^4 \to V$ la tranformación lineal que manda la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a α y $S_\beta : \mathbb{R}^4 \to V$ la tranformación lineal que manda la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a β. Entonces, $A = [D]_\alpha = (S_\alpha)^{-1}DS_\alpha$ y $B = [D]_\beta = (S_\beta)^{-1}DS_\beta$ (esto se ha visto en clase; es fácil verifacar esta fórmula aplicando ambos lados a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.)
Ahora calculamos

$$\begin{aligned} A &= (S_\alpha)^{-1}DS_\alpha = (S_\alpha)^{-1}S_\beta(S_\beta)^{-1}DS_\beta S_\beta^{-1}S_\alpha = [S_\alpha^{-1}S_\beta]S_\beta^{-1}DS_\beta[S_\alpha^{-1}S_\beta]^{-1} = \\ &= [S_\alpha^{-1}S_\beta]B[S_\alpha^{-1}S_\beta]^{-1}, \end{aligned}$$

así que si definimos

$$P := S_\alpha^{-1}S_\beta$$

tendremos que $A = PBP^{-1}$.
Ahora para calcular P, notamos primero que la columna j de P está dada por Pe_j (donde $e_1, \ldots, e_4$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$). Luego, $Pe_j = S_\alpha^{-1}(S_\beta e_j)$, lo cual está dado, por la definición de S_α y S_β, por los coeficientes del elemento j de la base β con respecto a la base α. Así que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

f) Cierto o Falso: D es diagonalizable.

$\triangleright$ Falso, ya que para ser diagonalizable un operador debe tener una base de vectores propios, mientras que todos los vectores propios de D están contenidos en un subespacio de dimensión 1 (los polinomios constantes). $\square$