Exámen parcial 1 (13/3/09) - soluciones

Cierto o Falso. Escoge 25 de los siguientes 30 incisos (si escoges más, se considerarán solo tus mejores 25). Luego, para cada uno de los incisos, decide si es cierto o falso. En caso de "Cierto", hay que dar una breve explicación (no tiene que ser una demostración completa). En caso de "Falso", hay que dar un contra-ejemplo. En todos los incisos, las ecuaciones, matrices etc., tienen coeficientes reales.

1. Todo sistema de ecuaciones lineales tiene por lo menos una solución.

   ▷ Falso. $0x = 1$ no tiene solución. □

2. Todo sistema homogeneo de ecuaciones lineales tiene por lo menos una solución.

   ▷ Cierto. Tiene la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$. □

3. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más que una solución entonces el sistema homogeneo asosciado tiene una solulción no trivial.

   ▷ Cierto. Si el sistema es $Av = w$ (A y w dados, v incognita), con soluciones distintas v_1, v_2, entonces $A(v_1 - v_2) = Av_1 - Av_2 = 0$, así que $u = v_1 - v_2 \neq 0$ es una solucíon al $Au = 0$. □

4. Si para un sistema de n ecuaciones con n incognitas, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ es invertible, entonces el sistema tiene una solución única.

   ▷ Cierto. Si el sistema se rescribe $Av = w$, entonces $v = A^{-1}w$ es una solución, ya que $AA^{-1}w = w$, y si v' es otra solución, i.e. $Av' = w$, entonces aplicando A^{-1} se obtiene $v' = A^{-1}w$. □

5. Si un sistema de ecuaciones lineales con mas incognitas que ecuaciones tiene una solución, entonces esta solución no es única.

   ▷ Correcto. La suposición implica que al llevar el sistema a su forma escalonada canónica, se quedan algunas variables libres. □

6. El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en n incognitas es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

   ▷ Falso. Si el sistema es inhomogeneo, el vector 0 no es una solución, por lo que el conjunto de soluciones no es un subespacio.

7. El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogeneas en n incognitas es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

   ▷ Cierto. Si el sistema es $Av = 0$, entonces si v_1, v_2 son soluciones y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = 0$, lo cual implica que $c_1v_1 + c_2v_2$ es una solución tambien. □

8. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se puede obtener como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en n incognitas.

   ▷ Cierto. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Sea $W^\perp$ el conjunto de todos los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ que son perpendiculares a todos los vectores de W. Entonces $W^\perp$ es un subespacio. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base para $W^\perp$. Sea A la matriz $m \times n$ cuyos reglones son los elementos de B. Entonces W es el espacio de soluciones al sistema $Av = 0$. □

9. Para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \times v_2 = 0$ si y solo si $v_1 = 0$ ó $v_2 = 0$.

   ▷ Falso. Si $v_1 = v_2 \implies v_1 \times v_2 = 0$. □

10. Si v_1, v_2 son dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, entonces los 3 vectores $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ son linealmente independientes.

   $\triangleright$ Cierto. Sea w cualquer vector en $\mathbb{R}^3$ y sea A la matriz 3×3 cuyos reglones son los vectores v_1, v_2, w. Entonces, por definición del producto vectorial, $det(A) = \langle v_1 \times v_2, w \rangle$. Para $w = v_1 \times v_2$ se obtiene que $det(A) = \|v_1 \times v_2\|^2$. Luego, $\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre v_1, v_2. Así que $\|v_1 \times v_2\| = 0 \implies \operatorname{sen} \theta = 0 \implies \theta = 0, \pi \implies$ un vector es un múltiplo del otro (positivo o negativo, depende si $\theta = 0$ o π.), así que son linealmente dependientes. $\square$

11. El producto de matrices invertibles es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Si A, B son invertibles, entonces $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$, así que AB es invertible, con inversa $B^{-1}A^{-1}$. $\square$

12. Sea $A = BC$, donde A, B, C son matrices 3×3, 3×2 y 2×3 (resp.). Entonces A no es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Basta ver que el sistema $Av = 0$ tiene una solución no trivial (ver inciso 4). Para esto, basta ver que $Cv = 0$ tiene una solución no trivial (porque una solución de $Cv = 0$ es una solución de $BCv = 0$). Pero el sistema $Cv = 0$ es de 2 ecuaciones con 3 incognitas, así que la solución trivial no es única (ver inciso 5). $\square$

13. Si A, B son dos matrices $n \times n$ tal que $AB = 0$, entonces $A = 0$ ó $B = 0$.

   $\triangleright$ Falso. Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $A^2 = 0$. $\square$

14. La suma de matrices invertibles es invertible.

   $\triangleright$ Falso. Para $A = (1)$, $B = (-1)$ (matriz de 1×1), se tiene que $A + B = 0$. $\square$

15. La transpuesta de una matriz invertible es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Si A es invertible, $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$, así que A^t es invertible, con inversa $(A^{-1})^t$. $\square$

16. Toda matriz ortogonal es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Una matriz ortogonal satisface (por definición) $AA^t = I$, así que es invertible (su inversa es su transpuesta). $\square$

17. Toda matriz simétrica es invertible.

   $\triangleright$ Falso. La matriz nula es simétrica. $\square$

18. Toda matriz simétrica positiva definida es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Una matriz simétrica A es congruente a una matriz diagonal: $A = PDP^t$, con P invertible y D diagonal. S es positiva definida cuando D tiene entradas positivas en el diagonal. En este caso D es invertible (la entradas en el diagonal de D^{-1} son los recíprocos de las entradas en el diagonal de D). Como P es invertible su transpuesta es invertible (ver inciso 15). Así que A es invertible como producto de invertibles (ver inciso 11). $\square$

19. Una matriz simétrica positiva definida tiene entradas positivas sobre su diagonal.

   $\triangleright$ Cierto. Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces $e_i^t A e_i$ es la entrada ii de A, y por otro lado es el valor de la forma cuadrática asociada a A en el vector e_i, por lo que es postivo. $\square$

20. Una matriz simétrica positiva definida tiene todas sus entradas positivas.

   $\triangleright$ Falso. Por ejemplo la matriz identidad. $\square$

21. Toda matriz diagonal $n \times n$ conmuta con todas las matrices $n \times n$.

   $\triangleright$ Falso para $n > 1$. Sea E_{ij} la matriz $n \times n$ cuya entrada ij es 1, y el resto de las entradas 0. Entonces $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ ($\delta_{jk} = 1$ si $j = k$, y 0 de otro modo). De aquí tenemos que $E_{11}E_{12} = E_{12}$, $E_{12}E_{11} = 0$, así que la matriz diagonal E_{11} no conmuta con E_{12}. $\square$

22. Si A es una matriz $n \times n$ que conmuta con todas las matrices $n \times n$ entonces A es diagonal.

   $\triangleright$ Cierto. De hecho, veremos que A conmuta con todas las matricies ssi es un múltiplo de la identidad. Sea $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$ (usamos la misma notación del inciso anterior). Si A conmuta con todas las matrices $n \times n$ entonces conmuta con todas las E_{kl}, por lo que $0 = AE_{kl} - E_{kl}A = \sum_{ij} a_{ij}(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}) = \sum_i a_{ik}E_{il} - \sum_j a_{lj}E_{kj} = \sum_{ij}(\delta_{jl}a_{ik} - \delta_{ik}a_{lj})E_{ij}$, por lo que $\delta_{jl}a_{ik} = \delta_{ik}a_{lj}$ para todo $1 \leq i,j,k,l \leq n$ (ya que los E_{ij} es una base para el espacio de las matrices $n \times n$). Para $i \neq k$, $j = l$, obetenemos $a_{ik} = 0$, y para $i = k \neq l = j$ obtenemos $a_{ii} = a_{jj}$, por lo que A es una matriz escalar (múltiplo de la identidad por un escalar). Por otro lado, un múltiplo de la identidad claramente conmuta con todas las matrices $n \times n$. $\square$

23. Existen dos vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ cuyo producto vectorial tiene norma 2.

   $\triangleright$ Falso. Si v_1, v_2 son dos vectores unitarios con ángulo θ entre ellos, entonces $\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\||\operatorname{sen}\theta| \leq \|v_1\|\|v_2\| \leq 1$. $\square$

24. Si A, B son dos matrices $n \times n$ equivalentes por reglones, entonces B es invertible si A es invertible.

   $\triangleright$ Cierto. Equivalence por reglones se realiza por multiplicación por la izquierda por un producto E de matrices elementales, $A = EB$. Como matrices elementales son invertibles, su producto E tambien lo es. Así que si B es invertible EB tambien lo es. $\square$

25. Si A, B son dos matrices $n \times n$ equivalentes por reglones, entonces B es simétrica si A es simétrica.

   $\triangleright$ Falso. La matriz identidad I (digamos 2×2) es equivalente por reglones a la matriz $I + E_{12}$. $\square$

26. Si A, B son dos matrices $n \times n$ congruentes, entonces A es simétrica positiva definida si B es simétrica positiva definida.

   $\triangleright$ Cierto. Para una matriz simétrica, la condición de ser positiva definida es equivalente a la condición que la forma cuadrática asociada sea positiva definida (sus valores para vectores no nulos son positivos). Si $A = P^tBP$ para una matriz invertible P, entonces $q_A(v) = v^tAv = v^tP^tBPv = (Pv)^tB(Pv) = q_B(Pv)$, así que $v \neq 0 \implies Pv \neq 0 \implies q_A(v) = q_B(Pv) > 0$. $\square$

27. La unión de dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio.

   $\triangleright$ Falso. La unión de los ejes de x y y en $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio, ya que $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ no está en la unión aunque $(1,0), (0,1)$ sí están. $\square$

28. La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio.

   $\triangleright$ Cierto. Si v_1, v_2 estan en la intersección, y λ_1, λ_2 son escalares, entonces $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ está en cada uno de los subespacios (ya que v_1, v_2 están), por lo que está en la intersección. $\square$

29. Dos vectores en $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo del otro por un escalar.

   $\triangleright$ Cierto. v_1, v_2 son linealmente dependientes ssi existen escalares λ_1, λ_2, no ambos cero, tal que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Si $\lambda_1 \neq 0 \implies v_1 = -(\lambda_2/\lambda_1)v_2$, y si $\lambda_2 \neq 0 \implies v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1$. $\square$

30. Tres vectores en $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo de algun otro por un escalar.

   $\triangleright$ Falso. e_1, e_2 y $e_1 + e_2$ son linealmente dependientes pero ningun par de ellos lo es. $\square$