Soluciones de problemas 3.2 y 3.3

Primero **3.3**. Calculamos el caracter de la representación de S_3 en V_d (polinomios homogeneos en 3 variables de grado d). Una base para V_d está dada por el conjunto de polinomios (monomios)

$$X_d = \{z_1^{d_1} z_2^{d_2} z_3^{d_3} | d_1 + d_2 + d_3 = d, 0 \leq d_1, d_2, d_3 \leq d\}.$$

La acción de S_3 en V_d deja a X_d invariante y de hecho V_d es la representación asociada a está acción. Así que $\chi_{V_d}(g)$ es el número de puntos fijos de la acción de g en X_d.

Con esta observación es fácil calcular que $\chi_{V_d}(e) = \#X_d = (d+1)(d+2)/2$, $\chi_{V_d}((12)) = [d/2] + 1$, $\chi_{V_d}((123)) = 1$ si d es un múltiplo de 3 y $\chi_{V_d}((123)) = 0$ si d no es un múltiplo de 3.

Sea $\chi = \chi_{V_{10}}$. Entonces $\chi(e) = 66$, $\chi((12)) = 6$ y $\chi((123)) = 0$. Ahora podemos calcular, usando la tabla de caracteres de S_3, que $\langle \chi, \chi_1 \rangle = (66+3\cdot 6)/6 = 14$, $\langle \chi, \chi_\sigma \rangle = (66-3\cdot 6)/6 = 8$, y $\langle \chi, \chi_\lambda \rangle = (66 \cdot 2)/6 = 22$, así que $V_{10} \sim 14 + 8\sigma + 22\lambda$. $\square$

Ahora **3.2**. Tenemos que $V_d = S^d(V_1) = S^d(1+\lambda) = 1 + \lambda + S^2(\lambda) + \ldots + S^d(\lambda)$, así que $V_{d-1} \oplus S^d(\lambda) = V_d$ y $\chi_{S^d(\lambda)} = \chi_{V_d} - \chi_{V_{d-1}}$.

Usando el ejercicio anterior calculamos que $\chi_{V_{10}}(e) - \chi_{V_9}(e) = 66 - 55 = 11$, $\chi_{V_{10}}((12)) - \chi_{V_9}((12)) = 6 - 5 = 1$, y $\chi_{V_{10}}((123)) - \chi_{V_9}((123)) = 0 - 1 = -1$.

Sea $\chi = \chi_{S^{10}(\lambda)}$. Entonces $\chi(e) = 11$, $\chi((12)) = 1$ y $\chi((123)) = -1$. Usando la tabla de caracteres de S_3 tenemos que $\langle \chi, \chi_1 \rangle = (11 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1))/6 = 2$, $\langle \chi, \chi_\sigma \rangle = (11 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1))/6 = 1$, y $\langle \chi, \chi_\lambda \rangle = (11 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)(-1))/6 = 4$, así que $S^{10}(\lambda) \sim 2 + \sigma + 4\lambda$. $\square$