Restricción de representaciones de S_n a S_{n-1}

(En construcción)

Durante las presentaciones de los alumnos en la clase sobre la teoría de representaciones del grupo simétrico S_n, usando diagramas y tablas de Young, encontramos que un resultado clave es la descomposición en irreducibles de la restricción de una representación irreducible de S_n al subgrupo S_{n-1} (pensado como el subgrupo que fija uno de los elementos $1, 2, 3 \ldots, n$, digamos n). La parte más dificil de la demostración de este resultado es demostrar que esta restricción es **libre de multiplicidad**, i.e.

> *En la restricción de una representación irreducible de S_n a S_{n-1}, cada representación irreducible de S_{n-1} aparece con multiplicidad ≤ 1 (1 ó 0).*

Esto se puede demostrar supuestamente manipulando diagramas de Young, aunque nosotros no hemos logrado entender la demostración.

Por otro lado, resulta que existe una muy bonita demostración de esta propiedad ("libre de multiplicidad") que es totalmente independiente de todo el resto de las ideas de la teoriá de representaciones del grupo simétrico que hemos visto en clase. La siguiente demostración la copié del árticulo "A new approach to the representation theory of the symmetric group", por Vershik y Okounkov (math.RT/0503040v3), páginas 8-10. Este artículo es muy interesante.

Teorema. Sea G un grupo finito y $H \subset G$ un subgrupo. Si para todo $g \in G$ existe un $h \in H$ tal que $hgh^{-1} = g^{-1}$, entonces toda representación irreducible compleja de G, restringida a H, es libre de multiplicidad.

Corolario. Toda representación ireducible compleja de S_n, restringida a S_{n-1}, es libre de multiplicidad.

Nota: La siguiente demostración de este corolario es diferente de la del artículo (creo), ya que no entiendo bien su demostración...

Demostración: Si g es un ciclo, $g = (i_1, \ldots, i_k)$, entonces $g^{-1} = (i_k, \ldots, i_1)$ y $hgh^{-1} = (h(i_1), \ldots, h(i_k))$. Así que si n no aparece entre $(i_1, \ldots, i_k)$ se puede definir $h(i_1) = i_k$, $h(i_2) = i_{k-2}$, etc, con un $h \in S_{n-1}$. En caso que n sí aparece en el ciclo, se puede permutar primero ciclicamente los elementos en los ciclos que representan a g

y g^{-1} hasta que n aparezca en ambos en el mismo lugar, y entonces tamnbien se puede tomar un h con $h(n) = n$. Si g es un producto de ciclos ajenos, se aplica este argumento a cada uno de los ciclos. $\square$

Ahora a la denmostración del teorema.

Lema 1. Sea $A = \mathbb{C}[G]$, y $Z(H) \subset A$ el centralizador de H en A (todos los $a \in A$ t.q. $ah = ha$ para todo $h \in H$). Entonces toda representación irreducible de G se restringe a una representación libre de multiplicidad de H ssi $Z(H)$ es *conmutativo.*

Demostración: Todavia no la entiendo... (es importante). $\square$

Para el siguiente lema se introducen dos operaciones claves en A. El adjunto $a \mapsto a^*$ y el conjugado $a \mapsto \bar{a}$. Si $a = \sum a_g g$, $a^* = \sum \bar{a}_g g^{-1}$, $\bar{a} = \sum \bar{a}_g g$. Ambas operaciones son *involuciones* ($a^{**} = a$, $\bar{\bar{a}} = a$), anti-lineales, la conjugación es un automorfismo ($\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$) y la adjunta es un antiautomorfismo ($(ab)^* = b^* a^*$). Todo esto es muy fácil de demostrar (ejercicio).

Lema 2. Sea $Z \subset A$ una subalgebra tal que $Z^* = Z$. Entonces Z es conmutativa ssi todo $z \in Z$ es *normal*, o sea conmuta con su adjunto ($zz^* = z^* z$). Si además $\overline{Z} = Z$, entonces Z es conmutativa si todo z real ($\bar{z} = z$) es auto-adjunto ($z^* = z$).

Demostración: completar. $\square$

Aplicamos ahora estos lemas para $Z = Z(H)$. Es facil ver que satiface $Z^* = Z, \overline{Z} = Z$. Entonces para demostrar el teorema basta ver que todo z real en Z es autoadjunto. Sea $z = \sum z_g g \in Z(H)$, $z_g \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $h \in H$, $hzh^{-1} = z \Leftrightarrow \sum z_g g = \sum z_g hgh^{-1} = \sum z_{h^{-1}gh} g \Leftrightarrow z_{hgh^{-1}} = z_g$ para todo $g \in G$ y $h \in H$. Pero tenemos que para todo $g \in G$ existe un $h \in H$ tal que $hgh^{-1} = g^{-1}$, así que $z_{g^{-1}} = z_g$ para todo $g \in G$. Esto es, $z^* = z$. $\square$