Tarea núm. 8

(Para el viernes 3 oct 2008)

Definiciones

- El *ángulo entre dos vectores* no nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ se define como la longitud del arco (más corto) del círculo $x^2 + y^2 = 1$ entre los dos puntos $\mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$ y $\mathbf{v}_2/\|\mathbf{v}_2\|$.
- Las *funciones trigonométricas* cos y sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se definen así: para cada $\alpha \geq 0$ se recorre una distancia α a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 1$, empezando en $(1, 0)$, en la dirección contraria a las manecillas del reloj (no digital). Si el punto en donde se termina el recorrido es (x, y), entonces se define $\cos\alpha := x$, $\operatorname{sen}\alpha := y$. Para α negativo se hace lo mismo, excepto que se recorre en la otra dirección (la de las manecillas del reloj).
- El *ángulo entre dos rectas* con ecuaciones $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2$, se define como el ángulo entre los vectores normales a las rectas $\mathbf{n}_i = (A_i, B_i)$.

  Nota: según esta definición, este ángulo cambia de α a $\pi - \alpha$ al multiplicar una de las ecuaciones de las rectas por una constante negativa; así que "el ángulo entre dos rectas", cuando $\alpha \neq \pi/2$, es de hecho un *par* de ángulos, α y $\pi - \alpha$. Esta amibigüedad es análoga a la de "la raíz de un número real" que es de hecho un par de números (para un número positivo), uno el negativo del otro.
- La *pendiente* de una recta l se define como $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, donde (x_i, y_i), $i = 1, 2$, son dos puntos distintos en l. Si $x_2 - x_1 = 0$ se define m como "infinita".

  Nota: hemos demostrado en clase que esta definición depende solo de l y no de los dos puntos que se escoge en l.

Algunas proposiciones vistas en clase

- $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| \cos\alpha$, donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$ y α es el ángulo entre ellos.
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Dos rectas son paralelas ssi tienen la misma pendiente; son perpendiculares ssi el producto de sus pendientes es -1, o una es vertical (pendiente infinita) y la otra horizontal (pendiente nula).

Problemas

1. Sea Δ el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $P_1 = (-1, -2)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (1, 1)$. Sea l_1 el lado opuesto a P_1 (la recta que pasa por P_2, P_3), l_2 el lado opuesto a P_2 y l_3 el lado opuesto a P_3. En cada inciso hay que calcular lo indicado y acompañarlo con un dibujo claro.

   a) Una ecuación para l_1, su pendiente, las intersecciones con los ejes x y y y su distancia al origen.

   b) El mediano por P_1 (la recta que pasa por P_1, intersectando a l_1 en el punto medio del segmento P_2P_3).

   c) La altura por P_1 (la recta que pasa por P_1 y perpendicular a l_1).

   d) La bisectriz en P_1 (la recta que pasa por P_1 y el interior de Δ, formando ángulos iguales con l_2 y l_3).

   e) El coseno del ángulo interior de Δ en P_1.

f) La mediatriz del segmento P_2P_3 (la recta perpendicular a l_1 equidistante a P_2 y P_3).

g) El baricentro de Δ (o su "centro de gravedad"; el punto de intersección de los medianos).

h) El ortocentro de Δ (la intersección de las alturas).

i) El círculo inscrito en Δ (es el círculo más grande contenido en Δ; su centro es la intersección de las bisectrices).

j) El círculo circunscrito por Δ (el círculo más pequeño que contiene a Δ; su centro es la intersección de las mediatrices).

k) El área y perímetro de Δ.

l) La recta que pasa por P_1 y paralela a l_1.

m) La recta que pasa por P_2, forma con l_1 un ángulo de 30^0, y no intersecta el interior de Δ.

n) La reflexión de P_1 por l_1.

ñ) La reflexión de l_2 por l_3.

o) Los puntos $Q \in \mathbb{R}^2$ tal que $P_1P_2P_3Q$ es un paralelogramo.
Nota: son 3 puntos.

p) * Encuentra un criterio sensillo para saber si un punto $P \in \mathbb{R}^2$ está dentro o fuera de Δ.

q) * Los puntos $Q \in \mathbb{R}^2$ tal que el tríangulo QP_2P_3 es rectángulo (uno de sus ángulos es $\pi/2$).
Nota: es la unión de un círculo y dos rectas.

r) ** El punto de Steiner de Δ (el punto de $\mathbb{R}^2$ que minimiza la suma de distancias a los 3 vértices).

2. * Cierto o falso: existen tres puntos racionales $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ que forman un triángulo equilátero con lados de longitudes racionales.

   Por ejemplo, $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$ son tres puntos racionales que forman un tríanguilo *rectángulo* con lados de longitudes racionales.

3. *a*) * Demuestra: si $P_\alpha = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ es un punto racional en S^1 (el conjunto de soluciones a la ecuación $x^2+y^2=1$), entonces $P_{n\alpha}$ también es racional para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si P_α corresponde al triple pitagórico (a,b,c), o sea $P_\alpha = (a/c, b/c)$ con $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$, entonces $P_{n\alpha}$ corresponde al triple (a_n, b_n, c_n), donde $a_n = aa_{n-1} - bb_{n-1}$, $b_n = ba_{n-1} + ab_{n-1}$, $c_n = c^n$, $n > 1$, y $(a_1, b_1, c_1) = (a,b,c)$. De ese modo un triple genera una infinidad de triples (a menos que α/π es un número racional). Para el triple $(a,b,c) = (3,4,5)$, todos los triples a_n, b_n, c_n, $n > 0$, son distintos y primitivos (así que para este caso α/π es irracional), pero no son todos los triples pitagóricos.

   b) ** Cierto o falso: existe un triple "más primitivo" que $3,4,5$; o sea, un P_α racional tal que $P_{n\alpha} = (3/5, 4/5)$ para algun $n > 1$.

   c) ** Estudia estas preguntas para todos los triples pitagóricos.