Matemáticas elementales y elementos de geometría, FAMAT, agto-dic, 2008

Tarea núm. 7

para entregar el viernes 26 de sept.

Definiciones.

- Suma de vectores: sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.
- Multiplicación por "escalar" (núm. real): sea $\mathbf{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\mathbf{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.
- Producto escalar: sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$, entonces $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$.
- Norma (o "longitud") de un vector: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ (la raíz no negativa).
- Distancia entre dos puntos: si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, $dist(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$.

Proposición (la "desigualdad de Cauchy-Schwartz", demostrado en clase). Para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle| \leq \|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|$, con igualdad ssi uno de los vectores es un múltiplo (por escalar) del otro.

Problemas.

1. Demuestra las siguientes propiedades del producto escalar, norma, y distancia:
   a) $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$.
   b) $\langle \lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   c) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.
   d) Si $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ entonces $\mathbf{v}_1 = 0$.
   e) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ con igualdad ssi $\mathbf{v} = 0$.
   f) $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   g) $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$. (Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.)
   h) $dist(P_1, P_2) \geq 0$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, con igualdad ssi $P_1 = P_2$.
   i) $dist(P_1, P_2) = dist(P_2, P_1)$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$.
   j) $dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$ para todo $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$.
2. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos.
   a) Demuestra que $P := (P_1 + P_2)/2$ es el "punto medio" entre P_1 y P_2; es decir, P es el único punto en $\mathbb{R}^2$ tal que (1) se encuentra sobre la recta que pasa por P_1 y P_2, y (2) $dist(P, P_1) = dist(P, P_2)$.
   b) Demuestra que un punto P está sobre la recta que pasa por P_1 y P_2 ssi es de la forma $P = t_1P_1 + t_2P_2$, con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 + t_2 = 1$.
3. Sea $l \in \mathbb{R}^2$ una recta.
   a) Demuestra que existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $P_1, P_2 \in l$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 - P_2 = \lambda\mathbf{v}$. Además, $\mathbf{v}$ es "único", en el siguiente sentido: si $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$ es otro tal vector (o sea para todo $P_1, P_2 \in l$ existe un $\lambda' \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 - P_2 = \lambda'\mathbf{v}'$) entonces $\mathbf{v}' = c\mathbf{v}$ para algun $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.
   b) Si l está dado por la ecuación $Ax + By + C = 0$, y si definimos $N = (A, B)$ entonces $(\mathbf{v}, N) = 0$.
   c) Para todo $Q \in \mathbb{R}^2$ existe un único punto $Q^* \in l$ tal que para todo $P \in l$, $dist(Q, P) \geq dist(Q, Q^*)$, con igualdad ssi $P = Q^*$.

      Sugerencia: toma dos puntos distintos $P_0, P_1 \in l$, define $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$ y estudia el polinomio cuadrático $f(t) = \|P_t - Q\|^2$.
4. Demuestra: los 3 medianos de un triángulo pasan por un solo punto, que divide a cada mediano en la proporción 2:1. Es decir: dados 3 puntos distintos P_1, P_2, P_3 no colineales (=no están sobre la misma recta), sean $Q_1 = (P_2 + P_3)/2$, $Q_2 = (P_1 + P_3)/2$, $Q_3 = (P_1 + P_2)/2$, y l_i la recta que pasa por P_i y Q_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces l_1, l_2, l_3 pasan por un solo punto P_0. Además, $dist(P_i, P_0) = 2dist(P_0, Q_i)$, $i = 1, 2, 3$.

   Sugerencia: $P_0 = (P_1 + P_2 + P_3)/3$.
5. * (opcional) Demuestra que en la desigualdad del triángulo, $dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$, tenemos igualdad ssi existe un $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, tal que $P_2 = tP_1 + (1-t)P_3$.