Tarea núm. 6 – soluciones

Definiciones.

- Una *recta* en $\mathbb{R}^2$ es el cojunto de soluciones a una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$, donde $A\neq 0$ ó $B\neq 0$.

  Por ejemplo: $l=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ ("el eje de x") es una recta ya que $l=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=0\}$. En este caso, $A=C=0$, $B=1$.
- Si dos rectas distintas no se intersectan (=tienen intersección vacía) se dice que son *paralelas*.

  Por ejemplo, la recta dada por $x=1$ es paralela al eje de y.

Proposiciones (demostrado en clase).

- Dadas dos rectas distintas, su intersección contiene un solo punto, o son paralelas.
- Dados dos puntos distintos, existe una sola recta que los contiene.

Problemas.

1. Encontrar una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$ para la recta que pasa por
   (a) $(2,0)$ y $(0,8)$, (b) $(-1,0)$ y $(0,-1)$, (c) $(0,0)$ y (a,b).

   ▷ (a) Substituimos $(2,0)$ en la ecuación y obtenemos $2A+C=0$. Substituimos $(0,8)$ y obtenemos $8B+C=0$. Si escogemos $C=-8$ tenemos $A=4$, $B=1$, así que tenemos la ecuación $4x+y-8=0$.

   (b) $x+y+1=0$.

   (c) $bx-ay=0$. Nota: $(a,b)\neq(0,0)$. □

2. Para cada par de las 3 rectas del problema anterior (hay 3 tales pares) encontrar su punto de intersección (a menos que sean paralelas).

   ▷ (a) con (b): restando las ecuaciones, se obtiene $3x-9=0 \implies x=3 \implies y=-4$.

   (a) con (c): cuando $4a+b=0$ las rectas son paralelas y no tienen intersección. De otro modo, la intersección es el punto $(8a/(4a+b), 8b/(4a+b)) = 8(a,b)/(4a+b)$.

   (b) con (c): paralelos cuando $a+b=0$, y de otro modo se intersectan en $-(a,b)/(a+b)$. □

3. Dos ecuaciones $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, describen la misma recta ssi existe una $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, tal que $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$.

   ▷ Demostramos primero que si una ecuación es un múltiplo de la otra por un $\lambda\neq 0$ entonces las ecuaciones describen la misma recta. Sea $l_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid A_ix+B_iy+C_i=0\}$, $i=1,2$. Dado un punto $P=(x,y)\in l_1 \implies A_1x+B_1y+C_1=0 \implies 0=\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=(\lambda A_1)x+(\lambda B_1)y+(\lambda C_1)= A_2x+B_2y+C_2 \implies P\in l_2$. Si $P\in l_2$ se repite el argumento con $1/\lambda$ en lugar de λ. Así que $l_1=l_2$.

   Suponemos ahora que las dos ecuaciones describen la misma recta, digamos l, y demostraremos que una ecuación es un múltiplo de la otra por un $\lambda\neq 0$.

   Suponemos primero que $(0,0)\in l$. Subsituyendo en ambas ecuaciones obtenemos $C_1=C_2=0$. Los valores $x=B_1, y=-A_1$ satisfacen entonces la primera ecuación así que corresponden a un punto en l, por lo que deben satifacer la segunda ecuación tambien. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $A_1B_2=A_2B_1$. Si $A_1\neq 0$ tomamos $\lambda=A_2/A_1$ y tenemos $B_2=A_2B_1/A_1=\lambda B_1$ y $A_2=\lambda A_1$. Como $C_1=C_2=0$ satisfacen automaticamente $C_2=\lambda C_1$ con cualquer λ. Si $B_1\neq 0$ obtenemos lo mismo con $\lambda=B_2/B_1$.

   Ahora para el caso general (que l no pasa necesariamente por el origen), escogemos un punto $(x_0,y_0)\in l$ y definimos $l_0=\{(x-x_0,y-y_0\mid(x,y)\in l\}$. Se checa facilmente que l_0 es el conjunto de soluciones de las ecuaciones $A_1x+B_1y=0$, $A_2x+B_2y=0$, así que l_0 es una recta, que pasa por el origen, y dada por dos ecuaciones. Podemos usar entonces el resultado del páráfo anterior, y concluir que existe una $\lambda\neq 0$, tal que $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$. Tenemos entocnes para cualquer punto de $(x,y)\in l$, que

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\lambda A_1x + \lambda B_1y + C_2 = 0$. Multiplicando la primera ecuación por λ y restando de la segunda, se obtiene $C_2 - \lambda C_1 = 0$, o sea $C_2 = \lambda C_1$. $\square$

4. Dos rectas son paralelas ssi estan dadas por un par de ecuaciones de la forma $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $C_1 \neq C_2$.

   $\triangleright$ Sea $l_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C_i = 0\}$, $i = 1, 2$. Si $P = (x, y) \in l_1 \implies Ax + By + C_1 = 0 \implies Ax + By + C_2 = Ax + By + C_1 + (C_2 - C_1) = C_2 - C_1 \neq 0 \implies P \notin l_2 \implies l_1 \cap l_2 = \emptyset \implies l_1 || l_2$.

   Suponemos ahora que l_1 y l_2 son dos rectas paralelas y demostraremos que están dadas por un par de ecuaciones de la forma $Ax+By+C_1 = 0$, $Ax+By+C_2 = 0$, $C_1 \neq C_2$. Como l_1 y l_2 son rectas entonces estan descritas por unas ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Sea $D = A_1B_2 - A_2B_1$. Primero veremos que $D = 0$. Si no, entonces $x = (C_1B_2 - C_2B_1)/D$, $y = (A_1C_2 - A_2C_1)/D$ satisfacen ambas ecuaciones así que las rectas tendran un punto de intersección.

   Entonces $D = 0$, o sea $A_1B_2 = A_2B_1$. De esta ecuación podemos concluir, como en el problema anterior, que existe un $\lambda \neq 0$ tal que $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$. Al dividir la ecuación $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (para l_2) entre λ, se obtiene entonces la ecuación $A_1x + B_1y + C_2/\lambda = 0$. $\square$

5. Dada una recta l y un punto $P \notin l$, existe una única recta l' que pasa por P y es paralela a l.

   $\triangleright$ Sea $Ax + By + C = 0$ una ecuación para l y $P = (x_0, y_0)$. Sea l_1 la recta dada por $Ax + By + C_1 = 0$, donde $C_1 = -(Ax_0+By_0)$. Entonces x_0, y_0 satisfacen esta ecuación así que $P \in l_1$ y l_1 es paralelo a l por el problema anterior. Si l_2 es otra recta paralela a l que pasa por P_0 entonces, por el problema anterior, debe estar dada por una ecuación de la forma $Ax + By + C_2 = 0$, pero como $P \in l_2$ sus coordenadas x_0, y_0 satifacen esta ecuación, por lo que $Ax_0 + By_0 + C_2 = 0 \implies C_2 = C_1 \implies l_2 = l_1$. $\square$

6. Encontrar una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ para la recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $x + y + 1 = 0$.

   $\triangleright$ $x + y + 2 = 0$. $\square$

7. Sea $l_0 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $P_0 = (0, 1)$ y $P \in S^1$, $P \neq P_0$. Demuestra que la recta que pasa por P, P_0 intersecta a l_0 en un solo punto.

   $\triangleright$ Se puede deducir el resultado mediante un cálculo sensillo pero lo haremos "sin cuentas", usando los problemas anteriores. Sea l la recta que pasa por P_0 y P. Como $P_0 \in l$ y $P_0 \notin l_0$, $l_0 \neq l$. Basta demostrar entonces que l y l_0 no son paralelas (usando la primera proposición en el preámbulo de la tarea). Ahora la recta l_1 dada por $y = 1$ pasa por P_0 y es paralela a l_0 (ya que no hay ningun punto (x, y) que satiface $y = 0$ y $y = 1$). Tambien tenemos que $P \notin l_1$ ya que el único punto en S^1 con $y = 1$ es P_0 (al sustituir $y = 1$ en $x^2 + y^2 = 1$ se obtiene inmediatamente $x = 0$). Como $P \in l$ tenemos que $l \neq l_1$ así que l no puede ser paralelo a l_0 (usando el problema aanterior). $\square$

8. Dados tres puntos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, existe una recta que pasa por los 3 puntos ssi $(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

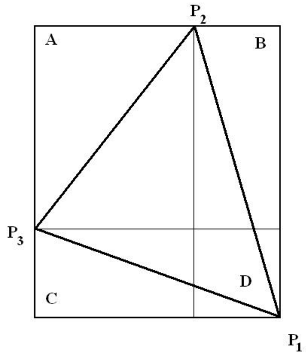
   $\triangleright$ Los tres puntos son colineales (=existe una recta que pasa por los 3) ssi la recta detrminada por P_1 y P_2 pasa por P_3. La ecuación $(y-y_1)(x_2-x_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$ es una ecuación para la recta que pasa por P_1, P_2. Al pedir que esta recta pase por P_3 se obtiene $(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$. $\square$

9. * Encontrar una interpretación geométrica de la cantidad

$$f(P_1, P_2, P_3) = |(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)|$$

   que apareció en el problema anterior.

   $\triangleright$ Esto es dos veces el área del triángulo con vértices P_1, P_2, P_3. Esto lo veremos más tarde con cuidado en el curso (o el próximo curso de álgebra lineal). Mientras, nos convencemos con un dibujo.



Formamos con los puntos P_1, P_2, P_3 un triángulo T. Luego enmarcamos T en un rectángulo R. El rectángulo R lo subdividimos en 4 subrectángulos, A, B, C, D, como se muestra en el dibujo. Así que $R = A \cup B \cup C \cup D$ y $|R| = |A| + |B| + |C| + |D|$ (denotamos el área de una figura F por $|F|$). Ahora cálculamos el área de T de la siguiente manera: $|T| = |R| - |R \setminus T|$; o sea, el área de T es el área de R menos el área del complemento de T en R. Este complemento es la unión de 3 triángulos, cuyos áreas son: $|A|/2$, $(|B| + |D|)/2$, y $(|C| + |D|)/2$. Tenemos entonces que el área de nuestro triángulo es

$$\begin{aligned} |T| &= |R| - |R \setminus T| = \\ &= (|A| + |B| + |C| + |D|) - [|A|/2 + (|B| + |D|)/2 + (|C| + |D|)/2] = \\ &= (|A| + |B| + |C|)/2 = (|R| - |D|)/2. \end{aligned}$$

O sea, 2 veces el área de nuestro triángulo es el área de R menos el área de D. Pero, por el dibujo, el área de R es $|R| = (y_2 - y_1)(x_1 - x_3)$ y el área de D es $|D| = (y_3 - y_1)(x_1 - x_2)$, así que $2|T| = (y_2 - y_1)(x_1 - x_3) - (y_3 - y_1)(x_1 - x_2)$.

Claro, cuando cambiamos las posiciones de los puntos la cuenta cambia, pero uno puede checar que el resultado es lo mismo (salvo un cambio de signo por algunas posiciones). □

10. * Para cada $n = 2, 3, \ldots$ encuentra el máximo número de puntos de intersección a_n que n rectas en el plano pueden tener. Por ejemplo, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$.

▷ Es fácil adivinar la fórmula $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$. Al intentar a demostrar esto de manera rigurosa, digamos por inducción, uno tiene que demostrar el siguiente lema: dado un conjunto finito de puntos y rectas en $\mathbb{R}^2$, existe una recta que no pasa por ninguno de los puntos dados y no es paralela a ninguna de las rectas dadas.

La mejor demostración de este lema usa conceptos que no hemos aprendido todavía pero les voy a contar de todos modos. Denotamos a nuestro plano $\mathbb{R}^2$ por Π. Ahora consideramos el conjunto de todas las rectas en Π. Este conjunto resulta ser tambien una especie de "plano". Lo denotamos por Π^*. Para cada punto $P \in \Pi$, el conjunto de todas las rectas que pasan por P resulta ser una "recta" en Π^*. Luego, para cada recta $l \subset \Pi$, el conjunto de todas las rectas paralelas a l es tambien una "recta" en Π^*. Así que nuestro conjunto finito de puntos y rectas en Π determina un conjunto finito de rectas en Π^*, y la recta que buscamos en el lema es un punto en Π^* que no toca a ninguna de estas rectas. O sea, nuestro lema se reduce al siguiente ejercicio: demostrar que $\mathbb{R}^2$ no es la unión finita de rectas. Les dejo pensar en este bonito reto.

Mientras, veremos una demostración elemental de este lema: Si las rectas estan dadas por ecuaciones $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ y los puntos son (x_j, y_j), $j = 1, \ldots$, definimos $r_i = A_i/B_i$ (no lo definimos cuando $B_i = 0$) y tomamos un r distinto de todos los r_i (digamos el máximo más 1). Luego definimos $c_i = y_i + r x_i$ y tomamos c diferente de todos los c_i. Ahora uno puede checar facilmente que la recta con la ecuación $rx + y = c$ no es paralela a ninguna de las rectas y no pasa por ninguno de los puntos. □

11. ** Está dado un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^2$ con la siguiente propiedad: para cada dos puntos del conjunto, la recta que pasa por ellos pasa por un tercer punto del conjunto. Demuestra que todos los puntos del conjunto están sobre una sola recta.

▷ Esto es el problema num 21 "elemental" en el "Rincon de Problemas" de la página internet del CIMAT. Si encuentras una solución la publicaremos en la página!