Tarea núm. 12

(PARA EL VIERNES 31 OCT 2008)

DEFINICIONES

- Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es simétrica si para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2 \rangle = \langle L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.
- Para una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio si existe un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si λ es un valor propio de L, los vectores $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ se llaman los vectores propios de L asociados a λ.
- El polinomio característico de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $p(\lambda) = det(L - \lambda I)$.
- Una función $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática si existen constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. La forma es diagonal si $B = 0$.

PROPOSICIONES VISTAS EN CLASE

- Dada una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la ecuación $L\mathbf{v} = 0$ tiene una solución $\mathbf{v} \neq 0$ ssi $det(L) = 0$.
- Los valores propios de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son las raices de su polinomio característico.
- Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal simétrica, entonces existe una rotación $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L' = \rho L \rho^{-1}$ satisface $L'(x', y') = (\lambda_1 x', \lambda_2 y')$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, son los valores propios de L y $\mathbf{v}_1 = \rho^{-1}(1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \rho^{-1}(0, 1)$ son los vectores propios asociados.

PROBLEMAS

1. Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^{@} \to \mathbb{R}^2$ es simétrica ssi existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, y) = (ax + by, bx + cy)$.
2. Encontrar los valores propios y vectores propios asociados de las sigientes transformaciones lineales: (a) $L(x, y) = (x, 0)$, (b) $L(x, y) = (y, x)$, (c) $L(x, y) = (x, x + y)$, (d) $L(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$.
3. Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) = 1\}$ y $\Delta = AC - B^2/4$.
   a) Si $\Delta > 0$ y $A > 0$ entonces C es una elipse. Encuentra sus focos en términos de A, B, C.
   b) Si $\Delta > 0$ y $A < 0$ entonces C es el conjunto vacio.
   c) Si $\Delta = 0$ y $Q \neq 0$ entonces C es un par de rectas paralelas o el conjunto vacio.
   d) Si $\Delta < 0$ entonces C es una hipérbola. Encuentra sus focos en términos de A, B, C.

   Sugerencia: encuentra una transformación lineal simétrica L tal que $Q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{v} \rangle$. Entonces $\Delta = det(L)$. Luego existe una rotacion ρ tal que $\rho L \rho^{-1}(x', y') = (\lambda_1 x', \lambda_2 y')$, donde λ_1, λ_2 son los valores propios de L, y $\Delta = \lambda_1\lambda_2$. Luego $Q \circ \rho^{-1}$ es diagonal, $(Q \circ \rho^{-1})(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.
4. Escribir una ecuación cuadrática para la parábola con foco en $(3, 4)$ y directriz dada por $x = y$.
5. Encontrar la directriz y el foco de la parábola $y = x^2$.
6. Encontrar los focos de la hipérbola $xy = 1$.
7. * Cierto o falso: para todo $z \in \mathbb{R}$ existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $6x^2 + 11xy + 5y^2 + z = 0$.