Exámen parcial 2 – soluciones

Viernes, 7 nov, 2008

1. La distancia entre $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (2, 2)$.
$\triangleright$ $dist(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\| = \|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$ □
2. La norma del vector $\mathbf{v} = (6, -8)$.
$\triangleright$ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$ □
3. El producto escalar de los dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 4)$.
$\triangleright$ $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 7.$ □
4. El coseno del ángulo entre $\mathbf{v}_1 = (3, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (8, 6)$.
$\triangleright$ $\cos\theta = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle / \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| = (3 \cdot 8 + 4 \cdot 6)/(5 \cdot 10) = 48/50 = 24/25.$ □
5. Los puntos P del segmento que une los puntos $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (2, 2)$, y que dividen la distancia entre P_1 y P_2 en una proporción de $1 : 2$.
$\triangleright$ Son $(P_1 + 2P_2)/3 = (3, 2)/3 = (1, 2/3)$ y $(2P_1 + P_2)/3 = (0, -2)/3 = (0, -2/3)$. □
6. La pendiente de la recta $x + 2y + 3 = 0$.
$\triangleright$ Re-escribimos la ecuación $y = -x/2 - 3/2 \implies m = -1/2$. □
7. La recta que pasa por $P = (2, 3)$ y paralela a la recta $x + 2y + 3 = 0$.
$\triangleright$ Como es paralela tiene la misma pendiente $\implies y = -x/2 + b$. Luego pasa por $(2, 3) \implies 3 = -2/2 + b \implies b = 4 \implies$ la recta está dada por $y = -x/2 + 4$. □
8. La recta que pasa por $P = (2, 3)$ y perpendicular a la recta $x + 2y + 3 = 0$.
$\triangleright$ Al ser perpendicular, $m = -1(-1/2) = 2 \implies y = 2x + b$, luego al pasar por $(2, 3) \implies 3 = 2 \cdot 2 + b \implies b = -1 \implies$ la recta está dada por $y = 2x - 1$. □
9. El punto de intersección de los medianos del triángulo con vértices $P_1 = (-2, -3)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (-1, 5)$.
$\triangleright$ $(P_1 + P_2 + P_3)/3 = (-1, 1)/3 = (-1/3, 1/3)$. □
10. Los valores y vectores propios de la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2x, 4y)$.
$\triangleright$ Valores propios: $\lambda = 2, 4$. Vectores propios de $\lambda = 2$: $(x, 0)$, $x \neq 0$. Vectores propios de $\lambda = 4$: $(0, y)$, $y \neq 0$. □
11. La determinante de la transformación lineal del inciso 10.
$\triangleright$ $det(L) = \lambda_1 \lambda_2 = 2 \cdot 4 = 8.$ □
12. La imagen de la recta $x + 2y + 3 = 0$ bajo la transformación lineal del inciso 10.
$\triangleright$ Sea $L(x, y) = (2x, 4y) = (x', y') \implies x = x'/2, y = y'/4$. Luego $x + 2y + 3 = 0 \implies x'/2 + 2y'/4 + 3 = 0 \implies x' + y' + 6 = 0$. □
13. La imagen del círculo $x^2 + y^2 = 1$ bajo la transformación lineal del inciso 10.
$\triangleright$ Con la misma notación, $x^2 + y^2 = 1 \implies (x'/2)^2 + (y'/4)^2 = 1 \implies$ la imagen es una elipse con semi ejes 2 y 4. □
14. La imagen de la parábola $y = x^2$ bajo la transformación lineal del inciso 10.
$\triangleright$ $y = x^2 \implies y'/4 = (x'/2)^2 \implies y' = x'^2 \implies L$ manda la parábola $y = x^2$ a su misma. □
15. La determinante de L^{2008} (L compuesta con su mimsa 2008 veces), donde $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal dada por $L(x, y) = (11x - 20y, 6x - 11y)$.
$\triangleright$ $det(L^{2008}) = (det(L))^{2008} = (-11 \cdot 11 - (-20) \cdot 6))^{2008} = (-1)^{2008} = 1.$ □
16. Los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe un vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $L\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, donde $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal dada por $L(x, y) = (x + y, x - y)$.
$\triangleright$ Son los valores propios: $det(L - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 1 \implies \lambda = \pm\sqrt{2}$. □
17. La inversa de la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2y, 4x)$.
$\triangleright$ Si $L(x, y) = (2y, 4x) = (x', y') \implies x' = 2y, y' = 4x \implies x = y'/4, y = x'/2 \implies L^{-1}(x', y') = (y'/4, x'/2)$. □
18. Una rotación (por el origen) $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que manda el vector $(1, 1)$ a un vector de la forma $(0, y)$.
$\triangleright$ Si $\rho(x, y) = (ax + by, -bx + ay)$ con $a^2 + b^2 = 1 \implies \rho(1, 1) = (a + b, -b + a) = (0, *) \implies a + b = 0 \implies a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ (o vice versa) $\implies \rho(x, y) = \pm(x - y, x + y)/\sqrt{2}$. □
19. Los focos de la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

▹ $x^2 + 2y^2 = 3 \implies (x\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$ con $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{3/2} \implies$ los focos estan ubicados en $(\pm a, 0)$ con $a = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{3 - 3/2} = \sqrt{3/2}$. □

20. Las longitudes de los semi-ejes (mayor y menor) de la elipse $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$.
▹ La trasnformación lineal simétrica asociado al lado izquierdo tiene eacuación característica $det(L - \lambda I) = (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 2^2 = 0 \implies \lambda = 1, 6 \implies$ despues de rotar los ejes x, y se obtiene la ecuación $x'^2 + 6y'^2 = 6 \implies (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$ con $\alpha = \sqrt{6}, \beta = 1$ (los semi-ejes mayor y menor, resp.). □
21. La distancia entre los focos de una elipse cuyo eje mayor mide 10 metros y eje menor mide 8 metros.
▹ $2a = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ metros.
22. Las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$.
▹ $x^2 - y^2 = 9 \implies y^2 = x^2 - 9 \sim x^2$ (para x grande) $\implies y = \pm x$ son las asíntotas. □
23. El máximo valor posible del producto escalar de dos vectores en $\mathbb{R}^2$, uno de norma 2, otro de norma 3.
▹ Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \leq \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| = 2 \cdot 3 = 6$, con igualdad ssi uno de los vectores es un múltiplo del otro (e.g. $(2, 0)$ y $(3, 0)$), así que el máximo valor es 6. □
24. El foco de la parábola $y = (x - 1)(x - 3)$.
▹ El vértice está en $x = 2$ (promedio de las raíces), $y = (2 - 1)(2 - 3) = -1$, así que despues de la translación $x' = x - 2$, $y' = y + 1$, la ecuación es $y' = x'^2$, la cual tiene su foco en $(0, 1/4)$, así que el foco de la parábola original está en $x = 2 + 0 = 2$, $y = 1/4 - 1 = -3/4$. □
25. La recta tangente a la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ en el punto $P = (1, 1)$.
▹ Consideramos la recta l con la ecuación $x + 2y = 3$. Claramente $P \in l$. Para ver que l es la recta buscada falta ver entonces que l intersecta la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ solamente en $(1, 1)$. Es fácil confirmar esto directamente pero mejor demostraremos un resultado más general: si $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de la elipse $Ax^2 + By^2 = C$, donde $A, B, C > 0$, entonces la recta dada por $Ax_0x + By_0y = C$ es tangente a la elipse en P_0. Claramente P_0 está en la recta. Veremos ahora que P_0 es el único punto de intersección de la recta y la elipse. Consideramos el sistema de dos ecuaciones $Ax^2 + By^2 = C$ y $Ax_0x + By_0y = C$ y hacemos un cambio de variable $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. Despues de hacer este cambio, y considerar que (x_0, y_0) resuelve ambas ecuaciones, se obtiene $Ax'^2 + By'^2 = 0 \implies x' = y' = 0 \implies x = x_0$, $y = y_0$. □