# Solución de problema 2.12

12 sept, 2007

**El Problema:** Dos campos vectoriales conmutan ssi sus flujos conmutan.

**Lema.** Dados dos campos vectoriales $X, Y$ en una variedad, sea $Y_t = d\Phi_t Y$, donde $\Phi_t$ es el flujo de $X$ (o sea $\dot{\Phi}_t = X \circ \Phi_t$). Entonces $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} Y_t = [Y, X]$.

**Demostración del Lema.** El inciso es local, así que podmeos suponer que estamos en un abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces $X$, $Y$ y $\Phi_t$ son vectores columna de funciones, y denotamos sus matrices Jacobianas (matrices de derivadas parciales) por $DX, DY, D\Phi_t$ (resp.). En esta notación, $[Y, X] = (DX)Y - (DY)X$ (ver ejr. 2.5) y $Y_t(\Phi_t x) = (D\Phi_t)(x)Y(x)$. Ahora tomamos la derivada $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$ de los dos lados de la última ecuación. Primero el lado izquierdo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} Y_t \circ \Phi_t = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} Y_t + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (Y \circ \Phi_t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} Y_t + (DY)X.$$

Luego el lado derecho:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (D\Phi_t)Y = \left[D \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi_t\right] Y = (DX)Y.$$

Juntando todo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} Y = (DX)Y - (DY)X = [Y, X].$$

□

**Corolario del Lema:** $\frac{\partial}{\partial t} Y_t = d\Phi_t [Y, X]$.

Para ver esto, usamos la propiedad de grupo de $\Phi_t$, o sea $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, así que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Y_t &= \lim_{s \to 0} \left(Y_{t+s} - Y_t\right)/s = \lim_{s \to 0} \left(d\Phi_{t+s} Y - d\Phi_t Y\right)/s = \lim_{s \to 0} d\Phi_t \left(d\Phi_s Y - Y\right)/s = \\ &= d\Phi_t \left[\lim_{s \to 0} \left(d\Phi_s Y - Y\right)/s\right] = d\Phi_t \left[\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} Y_s\right] = d\Phi_t [Y, X]. \end{aligned}$$

□

Ahora si $X$ y $Y$ conmutan, entonces según el corolario del lema, $\frac{\partial}{\partial t} Y_t = 0$, así que $Y_t$ es constante (en $t$), o sea $d\Phi_t Y = Y$, por lo que $Y$ *es invariante bajo el flujo de* $X$. Esto implica que $\Phi^X_s \circ \Phi^Y_t(x)$, para $s$ fijo y $t$ variable, es una curva integral de $Y$ (ver ejr. 2.7), y que pasa por $\Phi^X_s(x)$ en $t = 0$. Pero estas mismas propiedades las satisface la curva $\Phi^Y_t \circ \Phi^X_s(x)$, así que, por el teorema de unicidad de soluciones de EDO, deben coincidir. Conversamente, si los flujos de $X$ y $Y$ conmutan, o sea $\Phi^X_s(\Phi^Y_t x) = \Phi^Y_t(\Phi^X_s x)$, entonces derivando con respecto a $t$ en $t = 0$, obtenemos $Y_s = d\Phi^X_s Y = Y$, así que, según el lema, $[X, Y] = 0$. □