Notas núm. 7

Estas notas cubren las clases del curso desde 5 de nov. 2007. Los ejercicios están marcados con $\to$.

Definición. Sea ρ una representación de un grupo G en un espacio vectorial V sobre un campo k. El **caracter** de ρ es la función $\chi_\rho : G \to k$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, donde $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to k$ es la traza (la suma de las entradas en el diagonal de una matriz que representa una transformación lineal.)

Proposición.

1. $\chi_\rho(e) = \dim V$.
2. Si $g_1, g_2 \in G$ son elementos conjugados ($g_2 = hg_1h^{-1}$ para algun $h \in G$), entonces $\chi_\rho(g_1) = \chi_\rho(g_2)$.
3. Los caracteres de representaciones equivalentes coinciden.
4. $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.
5. $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2}$.
6. $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$.
7. $\chi_{\overline{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$.
8. Si $H \subset G$ es un subgrupo, $\rho' = \rho|_H$, entonces $\chi_{\rho'} = \chi_\rho|_H$.
9. Si ρ es una representación real, entonces $\chi_{\rho \otimes \mathbb{C}} = \chi_\rho$.
10. Si ρ es una representación compleja, entonces $\chi_{\rho_\mathbb{R}} = \chi_\rho + \overline{\chi_\rho} = 2\mathrm{Re}(\chi_\rho)$.

$\to$**7.1.** Demostrar esta proposición.

Ejemplos.

- Para $G = \mathbb{C}^*$, ρ la representación usual en $\mathbb{C}$, $\rho^n = \rho \otimes \ldots \otimes \rho$ (n veces), entonces $\chi_{\rho^n}(z) = z^n$. Esto incluye también n negativos, si definimos $\rho^{-1} = \rho^*$.
- Para $G = \mathrm{SU}_2$, ρ_n la representación en el espacio de polinomios homogeneos complejos en dos variables, g con eigen valores $z, \bar{z}$, $\chi_{\rho_n}(g) = z^n + z^{n-2} + \ldots + \bar{z}^n$.

$\to$**7.2.** Demuestra que todo elemento $g \in \mathrm{SU}_2$ es conjugado a una única matriz diagonal $diag(z, \bar{z})$, con $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta < \pi$.

- Para $G = \mathbb{R}$, ρ la representación en $\mathbb{R}^2$ dada por $\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_\rho(t) = 2$ para todo t. Esto coincide con el caracter de la representación trivial en $\mathbb{R}^2$. Así que vemos que para este grupo el caracter no nos da mucha información. Más adelante veremos para grupos de Lie compactos esto no sucede, i.e. el caracter es un invariante completo de la clase de equivalencia de una representación.
- Sea G un grupo que actua en un conjunto finito X. Sea $V = \mathbb{C}[X]$ la representación asociada en el espacio de las funciones en X. Entonces $\chi_V(g)$ es el número de puntos fijos de la acción de g en X.

El Lema de Schur. Sea V una representación irreducible compleja de un grupo G.

(A) Sea $T: V \to V$ una transformación lineal G-equivariante. Entonces $T = \lambda I$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}$.

(B) Si $T: V \to V'$ es una transformación lineal G-equivariante, donde V' es una representación lineal irreducible, entonces T es un isomorfismo, si $T \neq 0$.

Demostración: (A) Sea λ un eigenvalor de T. El kernel de $T - \lambda I$ es no trivial y G invariante. Tiene que ser entonces todo V.

(B) El kernel de T es subespacio G-invariante de V, así que es todo V o el subespacio nulo. Si es todo V entonces $T = 0$. Si $KerT$ es nulo entonces ImT es un subespacio invariante de V' que no es nulo. Como V' es irreducible la imagen de T es todo V' □

→**7.3.** Si V_1, V_2 son dos representaciones complejas irredicubles equivalentes, entonces

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 1.$$

($\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ es el espacio de transformaciones lineales G equivariantes entre V_1 y V_2).

→**7.4.** En una representación ireducible conmpleja existe a lo más un producto hermitiano invariante, salvo múltiplos positivos.

Sugerencia: un producto hermitiano invariante define un isomorfismo equivariante $\overline{V} \to V^*$.

→**7.5.** (Reto) Investigar como cambia el Lema de Schur si la representación es real.

Ahora empezamos estudiar la teoria de representaciones de grupos finitos. Más tarde veremos que una buena parte de esta teoría se extiende para grupos compactos. Si G es un grupo finito, se define $\mathbb{C}[G]$ como el espacio de funciones complejas en G (se llama a veces el "anillo del grupo"). Es un espacio vectorial de dimensión $\#G$ (el orden de G). Definimos en $\mathbb{C}[G]$ un producto hermitiano,

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f}_2(g).$$

→**7.6.** Esto es un producto hermitiano, bi-invariante, i.e. invariante bajo translaciones a la derecha e izquierda en G, y la base canónica (las "funciones delta") forma una base ortogonal.

Proposición. Toda representación compleja V de un grupo finito es unitaria (i.e. existe en V un producto hermitiano G-invariante).

Demostración: Tomamos en V un producto hermitiano cualquera $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, y definimos el producto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_g \langle g v_1, g v_2 \rangle_0.$$

Ahora es fácil verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto hermitiano G-invariante (ejercicio).

Corolario. Toda representación de un grupo finito es la suma directa de representaciones irreducibles.

Proposición ("las relaciones de ortogonolidad de Scur"). Sea ρ una representación irreducible compleja de un grupo finito G en un espacio vectorial V de dimensión finita, unitaria con respecto a un producto hermitiano invariante en V. Entonces

(A) Las n^2 componentes de ρ, con respecto a una base unitaria de V, satisfacen

$$\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}.$$

(B) Si ρ' es otra representación irreducible compleja que no es equivalente a ρ, entonces todas sus componentes son ortogonales a todas las componentes de ρ.

Demostración: (idea) Para toda $T \in \mathrm{End}(V)$ se define $\langle T \rangle := \frac{1}{\#G}\sum_g \rho(g)T\rho(g^{-1})$ y se verifica que es G-equivariante. Así que, según Schur, es un múltiplo de la identidad, $\langle T \rangle = \lambda I$. Tomando la traza de ambos lados, $\lambda = \mathrm{tr}T/\dim V$. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base unitaria y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su base dual. Sea $E_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ dada por $E_{ij}v = v_i\alpha_j(v)$. Ahora se calcula $\langle E_{ij} \rangle$ y se usa el hecho que es un múltiplo de la identidad. Para la segunda parte se hace algo similar con $T : V_1 \to V_2$ y $\langle T \rangle := \sum_g \rho_2(g)T\rho_1(g^{-1})$. $\square$

Corolarios. Para un grupo finito G:

1. Una representación es irreducible ssi su caracter es un elemento unitario (de norma 1) en $\mathbb{C}[G]$.
2. Los caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes son ortogonales uno al otro.
3. Dos representaciones (no necesariamente irreducibles) son equivalentes ssi sus caracteres coinciden.
4. El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles forma un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{C}[G]$.
5. El número de clases de equivalencias de representaciones irreducibles es finito, acotado por el número de las clases de conjugación en G.

El Teorema de Peter Weyl para grupos finitos

Ahora consideramos la acción de $G\times G$ en G por translaciones por ambos lados; i.e. $(g_1, g_2)\cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. Esto induce una representación de $G\times G$ en $\mathbb{C}[G]$ llamada la **representación regular**. Sea $\hat{G}$ el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles complejas de G. Para cada $\pi \in \hat{G}$ sea

- ρ_π una representación en la clase π, en un espacio vectorial V_π de dimensión d_π.
- $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ el subespacio generado por las componentes de ρ_π (con respecto a alguna base de V_π; es fácil ver que este espacio de funciones solo depende de π).
- χ_π el caracter de ρ_π.

Teorema. Bajo la acción de $G\times G$ en $\mathbb{C}[G]$, para cada $\pi \in \hat{G}$, $\mathbb{C}[G]_\pi$ es un subespacio invariante irreducible, isomorfo a $\mathrm{End}(V_\pi) = V_\pi \otimes V_\pi^*$, y $\mathbb{C}[G] = \oplus_\pi \mathbb{C}[G]_\pi$.

Ojo con el significado de $\mathrm{End}(V_\pi) = V_\pi \otimes V_\pi^* \ldots$

La parte esencial de la demostración consiste en ver que si $U \subset \mathbb{C}[G]$ es un subespacio invariante e irreducible bajo translaciones por la derecha e isomorfo a V_π, entonces $U \subset \mathbb{C}[G]_\pi$. Sea $f_1, \ldots, f_n$, $n = d_\pi$, una base de U. Tenemos entonces que $f_j(xg) = \sum_i \rho^\pi_{ij}(g) f_i(x)$. Tomando $x = e$ se obtiene que $f_j = \sum_i f_i(e)\rho^\pi_{ij} \in \mathbb{C}[G]_\pi$. $\square$

Corolario.

- $\#\hat{G} = \#(G/conj)$ (el número de clases de conjugación de G).
- $\#G = \sum_\pi d_\pi^2$.

Demostración. Consideramos la accíon de G en G por conjugación. El conjunto de orbitas (las clases de conjugación de G) se denota por $G/conj$. Su Orden es $\#(G/conj) = dim\mathbb{C}[G/conj]$. Luego el mapa $G \to G/conj$ induce un mapa lineal $\mathbb{C}[G/conj] \to \mathbb{C}[G]$ que es inyectiva y cuya imagen es el subespacio de las funciones en G invariantes bajo la acción de conjugación de G (se llaman a veces "funciones de clase"). Denotamnos este espacio por $\mathbb{C}[G]^{conj}$. Ahora el teorema de Peter-Weyl implica que $\mathbb{C}[G]^{conj} = \oplus\mathbb{C}[G]_\pi^{conj}$. Pero $\mathbb{C}[G]_\pi^{conj} = \mathrm{End}(V_\pi)^{conj}$ y V_π es irreducible, así que, según el Lema de Schur, $\dim \mathrm{End}(V_\pi)^{conj} = 1$. Esto demuestra el primer inciso.

El segundo inciso se obtiene al calcular las dimensiones de ambos lados de la formula $\mathbb{C}[G] = \oplus_\pi\mathbb{C}[G]_\pi$. □

→**7.7.** Demostración alternativa de $\#\hat{G} = \#(G/conj)$: calcular la norma (en $\mathbb{C}[G \times G]$) del caracter de la representación regular.

→**7.8.** Demostrar que el conjunto de los caracteres de representaciones irreducibles de un grupo finito G forma una base ortonormal de $\mathbb{C}[G]^{conj}$ (las funciones de clase).

Tablas de caracteres de grupos finitos.

Las columnas (verticales) estan etiquetadas por las representación irreducibled. Las filas (horizontales) por las clases de conjugación. Se forma un cuadrado.

→**7.9.** Construir las tablas de caracteres de $\mathbb{Z}_n$ (enteros mod n), S_3 (permutaciones de 3 objetos), A_4 (permutaciones pares de 4 objetos), S_4 (permutaciones de 4 objetos), D_n (simetrias de un poligono reglar con n lados).

Reciprocidad de Frobenious (opcional). Si $H \subset G$ es un subgrupo de un grupo finito, hay una relación entre las teorias de representaciones de H y G. Una dirección es obvia: Cada representación V de G *se restringe* a una representación $Res_H^G V$ de H. Claramente, $\dim V = \dim Res_H^G V$. En la otra dirección es más sofisticado: cada representación W de H "induce" una representación de G, denotada por $Ind_H^G W$, de dimensión $[G : H] \dim W$ (nota que $[G : H]$ es el *indice* de H en G, $[G : H] = \#G/\#H$).

Una manera de definir $Ind_H^G W$ es la siguiente. El grupo H actua en $G \times W$ por $h \cdot (g, w) = (gh^{-1}, hw)$ (la segunda entrada es la representación de H en W). Luego se define $E = G\times W/H$ y $p : E \to G/H$ inducido por la proyección de $G \times W$ al primer factor. La fibras de p son espacios vectoriales de dimensión $\dim W$. Luego se define a $Ind_H^G W$ como $\Gamma(E) :=$ el espacio de las funciones $f : G/H \to E$ tal que $p \circ f = id_{G/H}$, o sea $f(x) \in p^{-1}(x)$ para todo $x \in G/H$. $\Gamma(E)$ es un espacio vectorial y la acción de G en E está inducida por la acción de G en $G\times W$, $g \cdot (g_1, w) = (gg_1, w)$.

Nota: esta construcción se encunetra en geometría diferencial con otra terminolgía. $G \to G/H$ es un haz fibrado principal con grupo de estructura H, actuando en G por translaciones a la derecha. $E \to G/H$ es el haz vactorial asociado a la representación de H en W, y ΓE es el espacio de las secciones de E.

Ejemplo. Sea W la representación trivial de H. Entonces $Ind_H^G W = \mathbb{C}[G/H]$, con la acción de G asociada con la acción en G/H por translaciones por la izquierda.

→**7.10.** Calcular $Ind_H^G W$ para $G = S_n$, $H = A_n$ (el subgrupo de permutaciones pares), W =representacion irreducible, $n = 3, 4$.

El teorema de reprocidad de Frobenious afirma que inducción y restriccón son operaciones *duales*. Para formularlo, es comodo introducir un "producto escalar" en el conjunto de representaciones de un grupo finito. Dadas dos representaciones V, V' de G, se define $\langle V, V'\rangle := \dim \mathrm{Hom}_G(V, V')$ (aplicaciones lineales G-equivariantes).

→**7.11.** $\langle V, V'\rangle = \langle \chi_V, \chi_{V'}\rangle$ (producto hermitiano de caracteres en $\mathbb{C}[G]$).

Otra manera de decirlo: se define en el conjunto de representaciones de G un producto esclar al declarar la representaciones irreducibles como conjunto ortonormal.

Con esta notación, el teorema de reciprocidad de Frobenius afirma que para toda representacion V de G y representaión W de H,

$$\langle Ind_H^G W, V\rangle = \langle W, Res_H^G V\rangle.$$

La demostración consiste en la construcción de un isomnorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_H(W, Res_H^G V)$ y $\mathrm{Hom}_G(Ind_H^G W, V)$.

→**7.12.** Usando la formula de reciprocidad de Frobenius, calcular Ind_H^G para $G = S_4$, $H = S_3$ (el subgrupo que fija uno de los 4 objetos permutados por S_4).

Nota: la fórmula tiene sentido, y es correcta, para G compacto y H subgrupo de indice finito. Otra generalización es el caso de G compacto y H el centralizador de un subgrupo abeliano cerrado (un toro). Es una situación mucho más sofisticada (e interesante) ya que en este caso G/H es una variedad compleja y en lugar de ΓE hay que tomar el subespacio de secciones *holomorfas*. Escogiendo la representación W correctamente, se puede obtener, mediante este proceso de "inducción holomorfa" a todas las representaciones de G. Esto es el teorema de Borel-Weil-Bott. Ejemplo: Para $G = SU_2$, $H = U_1$, $G/H = \mathbb{C}P^1$ (la esfera de Riemann), $W = L^k$, $E = H^k$ (la k-esima potencia tensorial del haz de hiperplanos, o $O(k)$), y $Ind_H^G W = H^0(O(k)) = V_k$ (la representación irreducible de SU_2 en polinomios homogeneous de grado k en dos variables).