# Notas núm. 5

*Estas notas cubren las clases del curso desde 1 de oct 2007. Los ejercicios están marcados con* $\rightarrow$.

**Definición**. Consideramos una acción de un grupo de Lie $G$ en una variedad $M$. Para cada punto $x \in M$, se define una función $G \to M$, $g \mapsto gx$, y su derivada en $e \in G$ se denota por $X \mapsto \widetilde{X}(x)$. De este modo se define una aplicación lineal entre la álgebra de Lie de $G$ y el espacio de campos vectoriales en $M$. Esta aplicación se llama a veces la **acción infinitesimal** de la álgebra de Lie de $G$ en $M$.

$\rightarrow$**5.1.** $X \mapsto \widetilde{X}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

$\rightarrow$**5.2.** Sea $G = GL_n(\mathbb{R})$, con su acción usual en $\mathbb{R}^n$. Para un elemento $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}(x) = \sum_{ij} a_{ij}x_j\partial/\partial x_i$.

$\rightarrow$**5.3.** Considera $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con su acción usual en $\mathbb{R}^2$. Esto induce una acción en $M = \mathbb{R}P^1$ (la variedad de subespacios vectorial de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$). Encuentra la acción infinitesimal asociada.

Sugerencia. En términos de una coordenada inhomegenea $x \in \mathbb{R}$ (ie $x \mapsto$ la línea que pasa por el origen y $(x, 1) \in \mathbb{R}^2$) la acción infinitesimal está dada por campos de la forma $q(x)d/dx$, donde $q$ es un polinomio cuadrático.

**Definición**. Para un grupo de Lie $G$ con algebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define el **exponencial** $exp : \mathfrak{g} \to G$ por $exp(X) = \gamma(1)$, donde $\gamma : \mathbb{R} \to G$ es el subgrupo de 1 parametro tal que $\dot{\gamma}(0) = X$.

$\rightarrow$**5.4.** Para $G = GL_n(\mathbb{R})$, $exp(A) = e^A$.

$\rightarrow$**5.5.** Demuestra que $d\,exp(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es la identidad. Concluye que $exp$ es un difeomorfismo en una vecindad de $e \in G$.

$\rightarrow$**5.6.** Demuestra que todo grupo de Lie conexo está generado por cualquer vecindad de la identidad.

Sugerencia. La vecindad se puede escoger tal que $V = V^{-1}$. Luego demuestra que $\bigcup_n V^n \subset G$ es un subgrupo grupo abierto y cerrado.

$\rightarrow$**5.7.** Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de un grupo de Lie (así que es una subvariedad). Si $\gamma : \mathbb{R} \to G$ es un subgrupo de 1 parametro tal que $\dot{\gamma}(0)$ está en la álgebra de Lie de $H$ entonces $\gamma(t) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$**5.8.** Si $\phi : K \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, y $H \subset G$ es un subgrupo cerrado entonces $D\phi(e)T_eK \subset T_eH$ implica que $\phi(K) \subset H$ si $K$ es conexo.

**Definición**. La **representación adjunta** de un grupo de Lie es la representación lineal del grupo en su álgebra de Lie, dada por la derivada de la acción de conjugación. O sea, si $G$ es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$, por $Ad(g) = dC_g(e)$, donde $C_g : G \to G$ está dado por $C_g(x) = gxg^{-1}$. Luego se define $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ como la derivada de $Ad$ en $g = e$.

$\rightarrow$**5.9.** Demuestra que $ad(X)Y = [X, Y]$.

**Definición**. La **complexificación** de una representación real $V$ de un grupo $G$ es la representación en $V \otimes \mathbb{C}$, dada por $g \cdot (v \otimes \lambda) = (gv) \otimes \lambda$.

→**5.10.** $V$ es irreducible si $V \otimes \mathbb{C}$ es irreducible. El converso no es cierto (encuentra un contra-ejemplo).

→**5.11.** $[V \otimes \mathbb{C}]^G = [V^G] \otimes \mathbb{C}$.

**Definición**. El **conjugado** de un espacio vectorial complejo $V$ es el mismo conjunto de vectores, con la misma suma, pero la acción de los escalares complejos en los vectores está dada por la acción original conjugada; o sea, el nuevo $\lambda v$ es el viejo $\bar{\lambda} v$. Se denota el nuevo espacio vetorial conjugado por $\overline{V}$. Una transformación lineal compleja $T : V \to V$ es también una transformación lineal compleja de $\overline{V}$ y se denota por $\overline{T}$ (aunque es la misma función!). Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación compleja de define su conjugada $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}(\overline{V})$ por $\overline{\rho}(g) := \overline{\rho(g)}$. Una representación compleja es **auto-conjugada** si es isomorfa a su conjugada.

→**5.12.** . Una base de $V$ es también una base de $\overline{V}$. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal compleja, la matriz de $\overline{T}$ con respecto a una base es la conjugada de la matriz de $T$ con respecto a la misma base.

→**5.13.** Dar un ejemplo de una representación compleja que no es isomorfa a su conjugada.

Sugerencia. Considerar la representación de $GL_n(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^n$.

→**5.14.** La complexificación de una representación real es auto-conjugada. El converso no es cierto.

Sugerencia: considerar la representación usual de $\mathrm{SU}_2$ en $\mathbb{C}^2$.

## Repaso del laplaciano en una variedad riemanniana

**Definición**. Sea $M$ una variedad riemanniana. El **gradiente** de una función suave $f$ en $M$ es el campo vectorial $\nabla f$ que satisfsface $\langle \nabla f, v\rangle = df(v)$ para todo campo vectorial $v$. La **divergencia** de un campo vectorial $X$ en $M$ es la función $divX$ que satiface $L_X vol = (divX)vol$, donde $vol$ es el elemento de volumen asociado con la metrica riemanniana. El **laplaciano** de una función $f$ es $\Delta f = div(\nabla f)$. Una función $f$ es **armónica** si $\Delta f = 0$.

Notas.

- $L_X$ es la derivada de Lie asociada con el campo vectorial.
- El elemento de volumen $vol$ es una $n$-forma de norma 1, donde $n = dimM$. Para definir al elemento de volumen se requiere una orientación (hay extactamente dos $n$-formas en cada punto de norma 1), pero para la definición de la divergencia no depende de la selección de tal orientación, así que está bien definida.
- Hay una generalización del laplaciano de una función para cualquer forma diferencial y se llama el operador de Laplace-Beltrami. Todo lo que hacemos en el curso con el operador de laplace en la 2-esfera se generaliza para el operador de Laplace-Beltrami en la $n$-esfera.

→**5.15.** En un abierto en $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$.

→**5.16.** En una variedad compacta conexa, una función armónica es constante.

**Proposición.** Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie (subvariedad de dimensión 2), y $f$ una función suave definida en una vecindad de $M$, entonces

$$(\Delta_{\mathbb{R}^3} f)\,|_M = \Delta_M\,(f|_M) - 2H \cdot D_N f + (D_N)^2 f,$$

donde $D_N$ es la derivada en la dirección $N$ normal a $M$ y $H$ es la curvatura media de la superficie.

Notas.

- La curvatura media es el promedio de las dos curvaturas principal, $H = (k_1 + k_2)/2$. Las curvaturas principales son los eigenvalores de la forma bilineal simétrica $II(X,Y) = \langle N, D_X Y\rangle$ (la segunda forma fundamental). Las definiciones de $N$, $II$ y $H$ dependen de una selección de orientación en $M$ –todos cambian de signo al cambiar la orientación– pero en la fórmula de la proposición estos cambios se cancelan.
- Para el caso de una 2-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $k_1 = k_2 = H = 1/R$, y $D_N = \partial/\partial r$ (con respecto a la orientación estandar).

→**5.17.** Si $f$ es una función homogenea de grado $m$, entonces $\partial f/\partial r = mf/r$. Concluir que la restricción a la 2-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ de una función armónica homogenea en $\mathbb{R}^3$ es una eigen función del laplaciano de la esfera y determinar el eigen valor en términos del grado de homogeneidad de la función y el radio de la esfera.