Notas núm. 1

27 agsto, 2007

Estas notas cubren las 4 primeras clases del curso (13,15,20 y 22 de agosto 2007). Los ejercicios están marcados con →.

Definición. Un **grupo de Lie** es un grupo con una estructura de variedad diferencial tal que la multiplicación y la inversa son funciones suaves.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}^n$, con adición, es un grupo de Lie conexo no compacto de dimensión n.
- S^1=números complejos de magnitud 1, con multiplicacion de números complejos, es un grupo de Lie compacto conexo.
- $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es un grupo de Lie conexo compacto de dimensión=n.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas reales. Como un subconjunto abierto del espacio de las matrices $n \times n$ es claramento una variedad diferencial de dimension n^2. La multiplicación es una función cuadrática y la inversa racional, así que son suaves. Es un grupo no compacto con dos componentes conexas (det> 0 y det< 0).
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas complejas. Es no compacto y conexo de dimension $2n^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas cuaterniona. Es no compacto y conexo de dimension $4n^2$.
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ son las matrices $n \times n$ con entradas reales (resp. complejas) con determinante 1. Es de dimension $n^2 - 1$ (resp $2n^2 - 2$).
- O_n=matrices reales $n \times n$ ortogonales, ie $AA^t = I$. Es compacto, de dos componentes, de dimensión $n(n-1)/2$.
- SO_n=matrices reales $n \times n$ ortogonales con det=1. Es la componente de la identidad de O_n.
- U_n=matrices complejas $n \times n$ unitarias, ie $A\bar{A}^t = I$. Es compacto conexo de dimension n^2.
- SU_n=matrices complejas $n \times n$ unitarias, con det=1. Es compacto conexo de dimension $n^2 - 1$.

→**1.1.** U_1 es isomorfo a S^1, a SO_2 y a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

→**1.2.** Encuentra entre los ejemplos arriba los que son grupos conmutativos.

El ejemplo más importante en esta lista (y en la teoría en general) es sin duda $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se llama un **grupo de matrices** y todos los ejemplos arriba, excepto los primeros 3, son grupos de matrices. Aun los primeros 3 son isomorfos a grupos de matrices.

→**1.3.** Encuentra isomorfismos entre los primeros 3 ejemplos y grupos de matrices.

Se puede considerar a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ como subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ o $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ de manera obvia, pero tambien a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$) como subgrupo de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_{4n}(\mathbb{R})$).

→**1.4.** Encuentra isomorfismos explicitos entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ y grupos de matrices.

Hay un teorema muy útil (pero algo avanzado) que afirma que un subgrupo cerrado de un grupo de Lie es automaticamente una subvariedad, asi que un grupo de Lie, y con eso se establece facilmente que todos los ejemplos arriba son grupos de Lie. Pero aun sin este teorema basta con el teorema de la función implicita para los ejemplos arriba (ver más adelante). Durante todo el curso vamos a regresar a estos ejemplos.

Repaso de variedades diferenciales

Definición. Una **variedad diferencial** M ....

Definición. Una **función suave** (o mapeo) entre variedades diferenciales $f : M \to N$ ....

Definición. Se denota por $C^\infty(M)$ el conjunto de las funciones suaves $M \to \mathbb{R}$. Es una álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$ con unidad (la función constante 1).

Definición. Un **campo vectorial** X en M es una derivación $\mathbb{R}$-lineal de $C^\infty(M)$. O sea X es una tranformación $\mathbb{R}$-lineal de $C^\infty(M)$ que satisface $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

Esta es una definición algebraica y requiere una interpretación geométrica. Para $M = \mathbb{R}$, la derivada $f \mapsto f'$ es claramente una derivación de $C^\infty(\mathbb{R})$, i.e. campo vectorial, denotado por $\frac{d}{dx}$. Tambien es claro que si X es un campo vectorial y $a \in C^\infty(M)$, tambien $aX : f \mapsto a(Xf)$ es un campo vectorial.

→**1.5.** Demuestra que todo campo vectorial en $\mathbb{R}$ es de la forma $X = a\frac{d}{dx}$, donde $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, y que todo campo vectorial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es de la forma $X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, donde $a_i \in C^\infty(U)$.

Definición. El conjunto de los **germenes de funciones** en un punto $x \in M$ se denota por $C_x(M)$ y se define como el conjunto de clases de equivalencia de pares (U, f) ("elementos de funciónes") donde U es una vecindad de x y f una función suave en U. Dos tales elementos de funciones son equivalentes si coinciden en una vecindad de x. Este conjunto es tambien una algebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$.

Definición. El **espacio tangente** en un punto $x \in M$, denotado por T_xM, es el espacio de las derivaciones $\mathbb{R}$-lineales $C_x(M) \to \mathbb{R}$. El **haz** (o fibrado) **tangente** de M es $TM = \bigcup_x T_xM$ (unión disjunta de espacios vectoriales, un espacio, o "fibra", para cada $x \in M$).

→**1.6.** T_xM es un espacio vectorial de dimension=dim M, con una base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, donde $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de coordenadas en M en la vecindad de x.

→**1.7.** Para cada curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ tal que $a < 0 < b$ y $\gamma(0) = x$ se define $\dot\gamma(0) : C_x(M) \to \mathbb{R}$ por $\dot\gamma(0)f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$ (el "vector de velocidad de γ en $t = 0$"). Entonces $\dot\gamma(0)$ es un elemento bien definido de T_xM y todo elemento de T_xM es de esta forma.

Definición. La **derivada** (o diferencial) de una función suave $\phi : M \to N$, $d\phi : TM \to TN$, se define por $d\phi(x) : T_xM \to T_yN$, donde $y = \phi(x)$ y $[d\phi(x)X]f := X(f \circ \phi)$.

→**1.8.** $d\phi$ está bien definida y $d\phi(x)$ es una transformación lineal $T_xM \to T_yN$. Encuentra la matriz de $d\phi(x)$ con respecto a bases de derivadas parciales con respecto a coordenadas en vecindades de x y $\phi(x)$ (resp.)

→**1.9.** Si U es un abierto en un espacio euclideano V demuestra que para todo $x \in U$ existe un isomorfismo lineal $V \to T_xU$ dado por $v \mapsto \dot\gamma_v(0)$, donde $\gamma_v(t) = x + tv$.

Ojo: el isomorfismo del último ejercicio es importante y se va usar durante todo el curso.

→**1.10.** Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces $dT(x) = T$ para todo $x \in V$. (Ojo: usamos el ejercicio anterior para las identificaciones $T_xV = V$, $T_yW = W$).

Definición. Un subconjunto $N \subset M$ es una **subvariedad** si....

Teorema. Una subvariedad $N \subset M$ tiene una única estructura de variedad diferencial tal que...

Definición. Un **valor regular** de una función suave $f : M \to N$ es un punto $y \in N$ tal que para todo $x \in M$ tal que $f(x) = y$, $df(x) : T_xM \to T_yN$ es suprayectiva.

Teorema. (**Teorema de la función implicita**). Si $f : M \to N$ es una función suave y $y \in N$ un valor regular entonces $f^{-1}(y) = \{x \in M | f(x) = y\}$ es una subvariedad de M de codim=dim N.

→**1.11.** Completar los anunciados y demostraciones de todas las definiciones y teoremas en este repaso.

(Fin de repaso de variedades diferenciales).

* * *

Aplicamos ahora el teorema de función implicita para demostrar que O_n es un grupo de Lie de dimensión $n(n-1)/2$. Definimos $f : M \to N$, donde M es el espacio euclideano de las matricies $n \times n$, $N \subset M$ es el espacio de las matricies simétricas y $f(A) = AA^t$. Se calcula ahora que $df(A)X = AX^t + XA^t$. Tenemos entonces que demostrar que para toda matriz ortogonal A y matriz simétrica Y existe una matriz X tal que $AX^t + XA^t = Y$.

→**1.12.** Da una demostración completa que O_n, con la estructura de variedad inducida de $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, es un grupo de Lie.

(Fin de notas núm. 1).