Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2007.

Tarea num. 8

(Por entregar el martes, 26 marzo, 2007.)

NOTAS:

1. Todas las funciones que aparecen aquí son diferenciables tantas veces como sea necesario (3 veces es suficiente.)

2. Usaremos las siguiente definiciones (vistas en la clase): una forma diferencial lineal (una "1-forma") en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una expresión de la forma $L = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, donde las a_i son funciones en U. La diferencial de una función $f : U \to \mathbb{R}$ es la forma diferencial lineal $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Una forma diferencial lineal L es cerrada si $dL = 0$, o sea sus coeficientes satisfacen $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Es exacta si $L = df$ para alguna función $f : U \to \mathbb{R}$. La integral de L sobre una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to U$ es la integral (de una variable)

$$\int_\gamma L = \int_a^b \sum_i (a_i \circ \gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} dt.$$

3. Sea $f : V \to U$ una función diferenciable donde $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos abiertos, y sea $L = \sum_{i=1}^n a_i dy_i$ una forma diferencial lineal en U. Definimos a f^*L como la forma diferencial en V dada por

$$f^*L = \sum_{i=1}^m (a_i \circ f) df_i,$$

donde $f_1, \ldots, f_n$ son las componentes de f.

PROBLEMAS

1. Demuestra que la integral de línea de un campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$ con componentes $F_1, \ldots, F_n$ es la integral de la forma $L = \sum_i F_i dx_i$.

2. Sea $f : V \to U$ una función diferenciable y L una forma lineal en U. Demuestra que si L es cerrada f^*L es cerrada, y si L es exacta f^*L es exacta.

3. Sean W, V, U abiertos en $\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ (resp.), $g : W \to V$ y $f : V \to U$ funciones diferenciables y L una forma diferencial lineal en U. Demeustra que
$$(f \circ g)^*L = g^*(f^*L).$$
Sugerencia: usar la regla de la cadena.

4. Sea L una forma diferencial lineal en un abierto U en $\mathbb{R}^n$, y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva. Demuestra que
$$\int_\gamma L = \int_a^b \gamma^* L.$$
Sugerencia: usar la regla de la cadena.

5. Demuestra "la fórmula de cambio de variable para la integral de línea": Sea $f : V \to U$ una función diferenciable, L una forma lineal en U y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva. Entonces
$$\int_{f \circ \gamma} L = \int_\gamma f^* L.$$

6. En este ejercicio usamos la integral de línea para demostar que entre todas las figuras en el plano con el mismo diámetro, el círculo es la figura con el mayor área.

a) Sea $L = adx + bdy$ una forma diferencial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Expresa L en coordenadas polares; o sea, calcula f^*L, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función dada por $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$.

b) Expresa la forma $L = (xdy - ydx)/2$ en coordenadas polares. (Respuesta: $L = r^2 d\theta/2$.)

c) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto que contiene al orígen en su interior y cuya frontera está parametrizada por una curva cerrada γ, dada en coordenadas polares por una función $r(\theta)$. Demuestra que el área de A está dado por la integral

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta.$$

d) Demuestra, usando el último inciso, que si el diámetro de A (=el supremo de distancias entre pares de puntos de A) es $\leq d$, entonces su área es $\leq \pi d^2/4$ (el área de un disco con diámetro d).

Sugerencia: suponemos (sin pérdida de generalidad) que A es convexo, que su frontera pasa por el origen, y que A se encuentra "a la derecha" del eje de y. Entonces el área de A está dado por

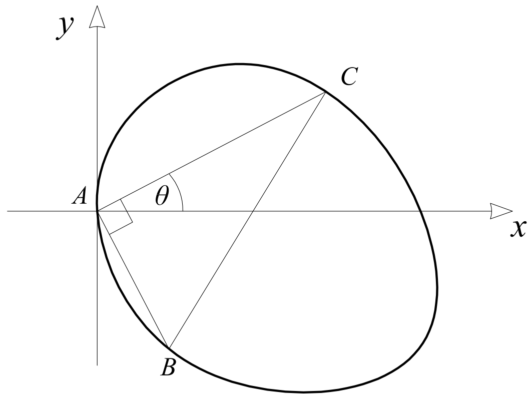
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [r^2(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [r^2(\theta) + r^2(\theta - \pi/2)]^2 d\theta.$$

Ahora observa en el dibujo que

$$r^2(\theta) = AC, \quad r^2(\theta - \pi/2) = AB,$$

y que

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \leq d^2.$$



7. (opcional) En este problema demostramos que "la integral de línea de una forma cerrada a lo largo de una curva cerrada es invariante bajo deformacioens de la curva". La formulación precisa es la siguiente:

Sea L una forma diferencial cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ dos curvas cerradas en U. Ahora suponemos que existe una función diferenciable $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ que satisface

- $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [a, b]$,
- $\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

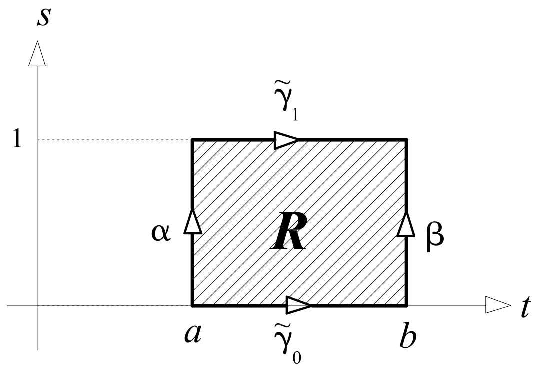
En el caso que existe tal Γ decimos que "se puede deformar γ_0 a γ_1 (o que son "homotópicas"), y que Γ es "la deformación" entre ellas.

Teorema. Si L es una forma cerrada y γ_0, γ_1 son dos curvas cerradas homotópicas, entonces

$$\oint_{\gamma_0} L = \oint_{\gamma_1} L.$$

Este teorema demostramos con lo siguientes pasos.

a) Consideramos el rectángulo $R = [a, b] \times [0, 1]$ (el dominio de Γ, en el plano t, s).



Sean $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \alpha, \beta$ las curvas que parametrizan las aristas de R, como en el dibujo, y $\tilde{L} = \Gamma^* L$. Demuestra que

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} \tilde{L} + \int_{\beta} \tilde{L} - \int_{\tilde{\gamma}_1} \tilde{L} - \int_{\alpha} \tilde{L} = 0.$$

Sugerencia: aplicar el teorema de la divergencia a la integral de la forma cerrada $\tilde{L}$ a lo largo de la frontera de R.

b) Demuestra que

$$\int_{\alpha} \tilde{L} = \int_{\beta} \tilde{L}.$$

Sugerencia: usar la fórmula de cambio variable y el hecho que $\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

c) Demuestra que

$$\int_{\tilde{\gamma}_i} \tilde{L} = \int_{\gamma_i} L, \qquad i = 0, 1.$$

Sugerencia: usar la fórmula de cambio variable.

d) Aplicación del teorema: demuestra que la integral de la forma $L = (xdy - ydx)/2\pi$, sobre cualquer curva cerrada en el plano que no pasa por el origen, es un número entero, el "número de vueltas" que la curva da alrededor del origen (y el signo indica si las vuelas estan con o contra las manecillas del reloj).

8. (Opcional) Generalizar los ejercicios 2,3,4,5,7 de esta tarea para formas diferenciales de grado arbitrario $k > 1$.