Teoría de números, Taller de Cálculo, 3-7 de julio, 2006, CIMAT.

Tarea núm. 2

Algunas definiciones y resultados vistos en la clase:

Definiciones:

- Un triple pitagórico es un triple de números naturales a, b, c que satisface $a^2 + b^2 = c^2$. El triple es primitivo si a, b, c no tienen factor común > 1.
- Un punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto racional si x, y son números racionales.
- Una línea en $\mathbb{R}^2$ es una línea racional si está dada por una ecuación con coeficientes racionales $Ax + By + C = 0$, con $A, B, C \in \mathbb{Q}$.
- Una cónica en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de soluciones de una ecuación cuadrática, $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$. La cónica es racional si está dada por una ecuación cuadrática con coeficientes racionales.
- La proyección stereográfica del círculo $x^2 + y^2 = 1$, desde el punto $P_0 = (0, 1)$ a la recta l dada por $y = 0$, manda un punto P del círculo (distinto de P_0) a la intersección de l con la recta que pasa por P_0 y P.

Lemmas:

- La línea que pasa por dos puntos racionales es racional.
- La intersección de dos líneas racionales es un punto racional.
- Si una ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ con coeficientes racionales tiene dos raices, y uno de los raices es racional, entonces el otro tambien es racional.
- Si una línea racional intersecta una cónica racional en dos puntos, y si uno de estos dos puntos es racional, entonces el otro punto tambien es un punto racional.

Proposición: la proyección stereográfica y su inversa mandan puntos racionales a puntos racionales.

Problemas

1. Encontrar todos los triples pitagóricos primitivos a, b, c con $0 < a, b, c \leq 50$.
2. Demostrar que $(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ es un triple pitagórico primitivo (i.e. sin divisor común > 1) si los enteros u, v son primos relativos (sin divisor comn > 1) y de distinta paredad (uno es par y el otro impar).
3. Encontrar todos los cuádruples pitagóricos primitivos en el rango $(1, ..., 50)$; o sea, los cudruples de enteros positivos (a, b, c, d), sin factor comn > 1, que satifacen $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, con $0 < a, b, c, d < 50$.
4. Demostrar la fórmula $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, usando las fórmulas para el coseno y seno de suma de ángulos y la definición $e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$.
5. Sean $P = e^{it}$, $Q = e^{is}$ y denota por $P*Q$ el punto $e^{i(t+s)}$. Demuestra que si P y Q son racionales entonces $P*Q$ también lo es. Deriva la fórmula correspondiente a la operación $P*Q$ para triples pitagóricos. Encuentra los primeros 5 potencias del triple pitagórico 3, 4, 5.