Exámen parcial núm. 2 - soluciones

22 mayo, 2006

Duración del exámen: 1.5 hrs

Hay que decidir para cada afirmación si es cierta o falsa y dar una breve explicación (no es necesario dar una demostración completa, es suficiente citar un teorema, hacer una cuenta o dar un contra ejemplo).

1. La forma $xdy - ydx$, definida en $\mathbb{R}^2$, es cerrada.

   ▷ Falso, ya que $\frac{\partial}{\partial x}x = 1$ y $\frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$. (Por definición, una forma en $\mathbb{R}^n$ es cerrada si para cualquer par de coordenadas x_i, x_j, el parcial de la coeficiente de dx_i con respecto a x_j es igual al parcial de la coeficiente de dx_j con respecto a x_i.)

2. La forma $xdy - ydx$, definida en $\mathbb{R}^2$, es exacta.

   ▷ Falso, ya que una forma exacta es cerrada.

3. La forma $(xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, es cerrada.

   ▷ Cierto, ya que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

4. La forma $(xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, es exacta.

   ▷ Falso, ya que la integral de una forma exacta alrededor de cualquer curva cerrada debe anularse, mientras la integral de esta forma alrededor del círculo unitario es 2π (si se orienta en el sentido contrario a las manecias del reloj).

5. La integral de línea en el plano del campo vectorial $v(x, y) = (x, y)/(x^2 + y^2)$, a lo largo de cualquer curva cerrada que no pasa por el origen, se anula.

   ▷ Cierto, ya que es un campo gradiente. Es la gradiente de la función $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$.

6. La integral de la forma $dx + dy$, a lo largo de cualquer curva cerrada en $\mathbb{R}^2$, se anula.

   ▷ Cierto, porque es una forma exacta; es la diferencial de la función $f(x, y) = x + y$.

7. Existe en $\mathbb{R}^2$ una forma diferencial lineal L con la siguiente propiedad: para todo conjunto medible en $\mathbb{R}^2$ cuya frontera está dada por una curva cerrada parametrizada γ (recorrida en el sentido de las manacillas del reloj), el área del conjunto está dado por la integral de L alrededor de γ.

   ▷ Cierto. Por ejemplo, L puede ser xdy. Tambien puede ser $-ydx$. (Hay muchas mas; al tomar una solución se le agrega cualquer forma excata df y se obtiene otra solución. Se puede demostrar que de este modo se obtienen todas las soluciones.)

8. Sean a, b dos números que satisfacen $-1 \leq a < b \leq 1$ y
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } a \leq z \leq b\}.$$
Entonces el área de la superficie S solo depende de $b - a$.

$\triangleright$ Cierto. El área de S es $2\pi(b - a)$. En otras palabras, el área de la esfera atrapado entre los planes horizontales $z = a$ y $z = b$ es igual al área del cilindro que circumscribe la esfera unitaria atrapado entre los mismos planos. Esto es uno de los resultados más famosos de Arquímedes (él mismo lo consideraba el más importante). Este resultado demuestra tambien que el área de superficie de la esfera unitaria es 4π (tomando $b = 1$, $a = -1$).

Calculando al estilo de un ingeniero: sea A el área de S y denotamos por dA el área de S que se encuentra entre los plano horizontales que pasan por z y $z+dz$ (una "rebanada"). De antemano dA depende de z, pero demostraremos que no. Esta rebanada de superficie tiene la forma de un anillo con radio r y ancho ds, así que tiene área $dA = 2\pi r ds$. Pero ahora con geometría elemental (tríangulos similares, hay que hacer un dibujo), se ve que $ds = dz/r$, así que $dA = 2\pi dz$.Al integrar esto entre a y b de obtiene $A = 2\pi(b-a)$.

Nota: Puedes comparar esta cuenta con la cuenta original de Arquímedes (ver en *http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Archimedes.shtml.*) ¿Cuál te gusta más?