Exámen parcial núm. 1 - soluciones

13 mar, 2006

Duración del exámen: 1.5 hrs. 25 pts cada problema.

1. Decide, para cada una de las siguientes ecuaciones, si describe una elipse o hipérbola. En caso de hipérbola encuentra la distancia entre sus focos, la distancia entre sus vértices y la tangente del ángulo entre sus líneas asíntoticas; en caso de elipse, encuentra la distancia entre sus focos y el tamaño de sus ejes mayor y menor.

   a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 100$.

   $\triangleright$ El polinomio característico es $(3-\lambda)^2 - 1$, con raices $\lambda = 2, 4$, así que es una elipse, con ecuación (con respecto a una base ortonormal de vectores propios) $2X^2 + 4Y^2 = 100$, ó $(X/a)^2 + (Y/b)^2 = 1$, con $a = \sqrt{50}$, $b = 5$. Así que el tamaño del eje mayor es $2a = 2\sqrt{50} \approx 14.2$ y el tamaño del eje menor es $2b = 10$. La distancia entre los focos es $2\sqrt{a^2 - b^2} = 10$. $\square$

   b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}x = 100$.

   $\triangleright$ La parte cuadrática es la misma como en el inciso anterior así que tenemos ls mismas raices del polinomio característico, $\lambda = 2, 4$, con vectores propios normalizados $(1, 1)/\sqrt{2}$, $(1, -1)/\sqrt{2}$. Sean X, Y las coordenadas con respecto a esta base, entonces $(x, y) = (X + Y, X - Y)/\sqrt{2}$. Así que la ecuación es $2X^2+4Y^2+8(X+Y) = 100$, o, completando los cuadrados, $2(X+2)^2+4(Y+1)^2 = 112$, o $[(X+2)/a]^2 + [(Y+1)/b]^2 = 1$, con $a = \sqrt{56}$, $b = \sqrt{28}$. Esta es la ecuación de una elipse con eje mayor $2a = 4\sqrt{14}$ y eje menor $2b = 4\sqrt{7}$. La distancia entre los focos es $2\sqrt{a^2 - b^2} = 4\sqrt{7}$. $\square$

   c) $x^2 - 6xy + y^2 = 100$.

   $\triangleright$ El polinomio característico es $(1-\lambda)^2 - 9$, con raices $\lambda = 4, -2$. La ecuación se convierte entonces en $4X - 2Y^2 = 100$, o $(X/a)^2 - (Y/b)^2 = 1$ con $a = 5$, $b = 5\sqrt{2}$. Esta es la ecuación de una hipérbola, con la distancia entre los focos $2\sqrt{a^2 + b^2} = 10\sqrt{3}$. Las asíntotas son $y = \pm(b/a)x$, así que $\tan\theta = b/a = \sqrt{2}$, donde 2θ es el ángulo entre las asíntotas. Así que $\tan 2\theta = 2\tan\theta/(1-\tan^2\theta) = -2\sqrt{2}$. $\square$

   d) $x^2 + 6xy + y^2 = 100$.

   $\triangleright$ la transformación $(x, y) \mapsto (-x, y)$ es una isometría del plano que manda esta ecuación a la ecuación del inciso interior, así que tenemos aqui una hipérbola congruente a la anterior, con la misma distancia entre focos y mismo ángulo entre asíntotas. $\square$

2. Encuentra la integral de la función $f(x, y) = x^2+y^2$ sobre las regiones (a) $x^2+y^2 \leq 1$; (b) $(x-1)^2+y^2 \leq 1$; (c) el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

   $\triangleright$ (a) Usando coordenadas polares

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2 + y^2)dxdy = \int_{0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi} r^2\, r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \pi/2.$$

   (b) Hacemos primero un cambio de variables $X = x - 1, Y = y$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{(x-1)^2+y^2\leq 1} (x^2 + y^2)dxdy &= \int_{X^2+Y^2\leq 1} ((X + 1)^2 + Y^2)dXdY = \\ &= \int (X^2 + Y^2)dXdY + 2\int XdXdY + \int dXdY.\end{aligned}$$

   La primera integral es $\pi/2$ (por el inciso anterior), la segunda es 0 (la integral de una función impar), y la tercera integral es π (el área del disco), así que la integral es $3\pi/2$.

(c) Usamos el teorema de Fubini:

$$\int_{0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \left[\int_0^1 (x^2+y^2)dy\right] = \int_0^1 (x^2+\frac{1}{3})dx = \frac{2}{3}.$$

$\square$

3. Encuentra la integral de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre las regiones (a) $x^2+y^2+z^2 \le 1$; (b) $(x-1)^2+y^2+z^2 \le 1$; (c) el cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

$\triangleright$ (a) Usando coordenadas esféricas

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le 1} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi} r^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{5}.$$

(b) Hacemos el cambio de variables $X = x-1, Y = y, Z = z$, entonces

$$\int_{(x-1)^2+y^2+z^2\le 1} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy = \int_{X^2+Y^2+Z^2\le 1} ((X+1)^2+Y^2+Z^2)\, dX\, dY\, dZ =$$

$$= \int (X^2+Y^2+Z^2)\, dX\, dY\, dZ + 2\int X\, dX\, dY\, dZ + \int dX\, dY\, dZ.$$

La primera integral es $4\pi/5$ (por el inciso anterior), la segunda es 0 (la integral de una función impar), y la tercera integral es $4\pi/3$ (el volumen de la esfera), así que la integral es $4\pi/5 + 4\pi/3 = 32\pi/15$..

(c) Usamos el teorema de Fubini:

$$\int_{0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1,\, 0\le z\le 1} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \left[\int_0^1 dy \left(\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)dz\right)\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\int_0^1 dy \left(x^2+y^2+\frac{1}{3}\right)\right] = \int_0^1 (x^2+\frac{2}{3})dx = 1.$$

$\square$

4. Una cisterna de 100 metros cúbicos tiene la forma de una caja rectangular, con base que mide a metros por b metros, y con altura de h metros. El costo de construcción es 500 pesos por metro cuadrado de piso, 700 pesos por metro cuadrado de pared y 1000 pesos por metro cuadrado de techo. Encuentra las medidas a, b, h de la cisterna que minimizan el costo de construcción.

$\triangleright$ El costo total es $500ab + 700\cdot 2(a+b)h + 1000ab = 1500ab + 1400(a+b)h$. Pero $abh = 100$, así que el costo es $f(a,b) = 1500ab + 140000(a+b)/ab$. Un punto mínimo de f es un punto crítico, en donde $f_a = f_b = 0$. Esto es $1500b - 140000/a^2 = 1500a - 140000/b^2 = 0$. Esto implica que $a = b = \sqrt[3]{280/3} \approx 4.5$, $h = 100(3/280)^{2/3} \approx 4.9$. En este punto $f((280/3)^{1/3}, (280/3)^{1/3}) = 1500(280/3)^{2/3} + 140000\cdot 2(a+b)/ab$.Checamos que es un mínimo local: $f_{aa} = 280000/a^3 = 3000$, $f_{bb} = 280000/b^3 = 3000$, $f_{ab} = 1500$. La matriz hessiana es entonces $1500A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $(2-\lambda)^2 - 1$, con valores propios 1,3, así que el hessiano es positivo definido y estamos en un mínimo local. Para ver que es un mínimo global podemos usar el argumento siguiente. Fijamos el a y consideramos la función $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(b) = f(a,b)$. Esta función (de una variable) tiene un mínimo en $b_0 = \sqrt{280/3a}$ ya que en este punto $g'(b_0) = 0$ y $g''(b) > 0$ para todo $b > 0$. Tenemos entonces que $f(a,b) \ge f(a,b_0)$ para todo $a, b > 0$. Ahora $f(a,b_0) = 140000h(a)$, donde $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ está dada por $h(a) = \sqrt{3a/70} + 1/a$. Esta función tiene un mínimo en $a_0 = \sqrt[3]{280/3}$ ya que en este punto $h'(a_0) = 0$, $h''(a_0) > 0$, y es el único punto crítico de h. Esto concluye la demostración que $a = b = \sqrt[3]{280/3}$ es el mínimo de f. $\square$