Cálculo III, agosto - diciembre 2006

Tarea 8

Definición 1. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Una *elipse* con *focos* en P_1, P_2 es el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^2$ cuya suma de distancias a P_1, P_2 es una constante, digamos $2a$, es decir $d_1 + d_2 = 2a$, donde $2a > \|P_1 - P_2\|$ y $d_i = \|P_i - P\|$, $i = 1, 2$. El punto $(P_1 + P_2)/2$ se llama el *centro* de la elipse, la línea que pasa por P_1, P_2 es el *eje mayor*, y la línea ortogonal al eje mayor que pasa por el centro es el *eje menor*. La constante a es la *longitud del semieje mayor*. Los puntos más lejanos y más cercanos al centro de la elipse son los *vértices* de la elipse.

Nota: Si los focos coinciden ($P_1 = P_2$) la elipse es un círculo; los ejes y los vértices no están definidos en este caso y a es el radio del círculo.

Definición 2. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Una *hipérbola* con *focos* en P_1, P_2 es el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^2$ cuya diferencia de distancias a P_1, P_2 es una constante, digamos $2a$, es decir, $|d_1 - d_2| = 2a$ donde $0 < 2a < \|P_1 - P_2\|$ y $d_i = \|P_i - P\|$, $i = 1, 2$. El punto $(P_1 + P_2)/2$ se llama el *centro* de la hipérbola, la línea que pasa por P_1, P_2 y la línea ortogonal a ésta que pasa por el centro son los *ejes principales* de la hipérbola. Los puntos más cercanos al centro de la hipérbola son los *vértices* de la hipérbola.

1. a) Demuestra que una forma cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es positiva definida ssi $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.

   b) Demuestra que $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es una forma cuadrática no degenerada (su matriz asociada es invertible) e indefinida ssi $ac - b^2 < 0$.

   (Sugerencia: si el determinante de una matriz simétrica 2×2 es positivo, entonces sus valores propios son ambos positivos o negativos. Si son ambos negativos entonces la forma cuadrática asociada es negativa definida. La condición $a > 0$ significa que Q tiene por lo menos un valor positivo; el determinante es negativo ssi sus valores propios son de signos opuestos).

2. a) Demuestra que la ecuación de una elipse con focos en $P_1 = (c, 0), P_2 = (-c, 0)$ se puede escribir en la forma $Q(P) = 1$, donde Q es una forma cuadrática positiva definida.

   b) Demuestra que la ecuación de una hipérbola con los mismos focos que en a) se puede escribir en la forma $Q(P) = 1$ donde Q es una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

   (Sugerencia: jugar con las ecuaciones de las definiciones)

3. Demuestra que si Q es una forma cuadrática no degenerada e indefinida, entonces $Q(P) = 1$ es la ecuación de una hipérbola cuyos focos están simétricamente situados con respecto del origen ($P_2 = -P_1$). Encuentra la relación entre Q y los ejes de la hipérbola.

4. Demuestra que la ecuación de una hipérbola en general se puede escribir de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde la parte cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

   (Sugerencia: Sea $P_0 = (P_1 + P_2)/2$ el centro de la hipérbola. Demuestra que la ecuación de la hipérbola se puede escribir de la forma $Q(P - P_0) = \text{constante}$.)

5. Demuestra que $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 16x + 28y + 13 = 0$ es la ecuación de una hipérbola. Encuentra su centro, focos, ejes y vértices. Hacer un dibujo.

   (Sugerencia: define un cambio de variables ortogonal $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ que diagonalice la parte cuadrática; luego define una traslación $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$ que absorba la parte lineal en la parte cuadrática (completa los cuadrados). La ecuación en términos de (x_2, y_2) se reduce al caso 2 b).)

6. (Opcional) Demuestra que la intersección de un plano en $\mathbb{R}^3$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ es una elipse ssi el plano no pasa por el origen y el ángulo que forma con el eje z es $> 45°$. Demuestra que los focos de la elipse se encuentran mediante la siguiente construcción: Considera las esferas inscritas en el cono y tangentes al plano, hay una pequeña "atrapada" dentro del cono y otra, más grande, al otro lado del plano. Los puntos de contacto de esferas con el plano son los focos de la elipse. Haz clic aquí para ver una figura que puede ser útil (http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2006/calculo4/elipse.gif).)