Exámen Final

5 dic, 2006

Hay que resolver 4 de los siguientes 5 problemas (25 pts cada problema).

1. Formular con precisión y demostrar el teorema de función inversa.

   Nota: se puede usar el teorema de función implicita.

2. Demuestra: toda función contínua en un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ tiene un punto mínimo.

3. Encontrar un punto sobre la curva $x^4 + y^4 = 1$ que minimiza la distancia a la recta $x + 2y = 10$.

4. Sea $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por $r(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales r^α es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   Nota: una funcíon f es armónica si $\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   a) Demuestra que f es diferenciable y encuentra la matriz Jacobiana de f en un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) Encuentra un subconjunto abierto maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $V = f(U)$ es abierto y la restricción de f a U define una biyección $U \to V$ cuya inversa es diferenciable.