Teoría de números, Taller de Cálculo 4-8 de julio, 2005, CIMAT.

Tarea núm. 1

Algunas definiciones y resultados vistos en la clase:

- La *parte entera* de un número real x se define como $[x] := \max\{m | m \leq x\}$. Se define a la *parte fraccional* como $x \pmod 1 := x - [x]$.
- Un subconjunto $A \subset [0,1)$ es *denso* si para todo $x < y$ en $[0,1)$ existe un $a \in A$ tal que $x < a < y$.
- Una sucesión de números reales $x_0, x_1, x_2, \ldots$ en el intervalo $[0,1)$ es *uniformamente densa* (o "equidistribuida") si para todo sub-intervalo $[a,b] \subset [0,1)$ la sucesión de los números

  $$F_N := \frac{\#\{x_j | 0 \leq j \leq N\} \cap [a,b]}{N+1}$$

  satiface

  $$\lim_{N\to\infty} F_N = b - a.$$

- **El criterio de Weyl** (para la equidistribución de una sucesión en $[0,1)$):

  sea $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una sucesión en el intervalo $[0,1)$. Para cada par de números naturales k, N definimos el número complejo

  $$P_{k,N} := \frac{\sum_{j=0}^{N} e^{2\pi i x_j}}{N+1}.$$

  Entonces la sucesión está equidistribuida ssi

  $$\lim_{N\to\infty} P_{N,k} = 0$$

  para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

Problemas

1. Demuestra que $\log_{10} 2$ es irracional.
2. Sea b un número irracional. Demuestra que

   a) el conjunto $\{nb \pmod 1 \,| n \text{ es entero}\}$ es infinito.
   Sugerencia: demuestra que todos los números $nb \pmod 1$ son distintos.

   b) el conjunto $\{nb \pmod 1 \,| n \text{ es natural }\}$ es infinito.
3. Sea i un número natural en el rango $0, 1, \ldots, 16$ y sea A_i el conjunto de los números naturales de la forma $17k + i$. Para cada número natural N sea

   $$F_N := \frac{\# A_i \cap \{0, 1, \ldots, N\}}{N+1}.$$

   Demuestra que

   $$\lim_{N\to\infty} F_N = \frac{1}{17}$$

   para todo $i = 0, 1, \ldots, 16$.
4. Sea b un número irracional. Verificar el criterio de Weyl para la sucesión $x_j = jb \pmod 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.