Cálculo III, aug-dic 2005.

Tarea num. 6
(Para el 20 sept, 2005)

1. En este ejercicio damos una definición alternativa, más sofisticada, del gradiente de una función. La primera parte es un repaso de álgebra lineal.
   a) Sea $V = \mathbb{R}^n$, equipado con el producto escalar usual: $\langle (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$. Sea V^* el espacio dual (el espacio de las funcionales lineales $V \to \mathbb{R}$). Para un $v \in V$ se define $v^* : V \to \mathbb{R}$ por $v^*(w) = \langle v, w \rangle$. Demuestra que $v^* \in V^*$ (o sea v^* es lineal) y que la función $V \to V^*$ dada por $v \mapsto v^*$ es un isomorfismo lineal de espacios vectoriales. Se dice que el vector v *representa* al funcional v^*. Concluye que todo funcional lineal $\alpha \in V^*$ está representado por un único $v \in V$.
   b) Encuentra el vector $v \in \mathbb{R}^2$ que representa al funcional lineal $(x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + 3x_2$.
   c) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^n$, y $x_0 \in U$. Demuestra que la derivada de f en x_0 está representada por el gradiente de f en x_0.

   (Recordando: hemos definido al gradiente de f como la función $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las derivadas parciales de f).
2. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $h : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, tal que $h = g \circ f$, donde $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Expresa el gradiente de h en términos del gradiente de f y la derivada de g.
3. Sean f, g dos funciones reales diferenciables definidas en un abierto en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que $\nabla fg = (\nabla f)g + f(\nabla g)$.
4. Pág. 91-92: 1,2, 3 (opcional), 4.

   Sugerencias y comentarios sobre estos problemas:
   - En el problema 1, las derivadas u_r y u_θ se refieren en realidad a las derivadas parciales de la función compuesta $f \circ \phi$, donde $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función dada por $\phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Hay que usar la regla de la cadena.
   - El problema 2 se puede reformular así: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable dos veces (el gradiente $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable). Sea $\Delta f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ (el "Laplaciano" de f). Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una "rotación", o sea una trasformación lineal de la forma $T(x, y) = (ax - by, bx + ay)$, donde $a^2 + b^2 = 1$. Entonces $\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T$.

     (Nota: las rotaciones son extactamente las transformaciones lineales que preservan norma, $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, y con determinante positivo. Demuestralo!)
   - El problema 3 se puede reformular así: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable dos veces. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Sea $\tilde{f} = f \circ T$. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadratica, o sea $p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces $\tilde{p} = p \circ T$ es tambien una forma cuadrática, $\tilde{p}(x, y) = \tilde{a}x^2 + 2\tilde{b}xy + \tilde{c}y^2$, con $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Sea $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por $T(a, b, c) = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$. Entonces $\tilde{T}$ es una trasformación lineal. Se define $D^2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $D^2 f = (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$. Entonces $D^2 \tilde{f} = \tilde{T} \circ D^2 f$.