Calculo III, aug-dic 2005.

Tarea num. 4

(Para el 2 sept, 2005)

1. Pág. 73 del libro de Courant y John: 2,5.

   Nota: en problema 2, $D_{(\alpha)}f$ significa $D_v f$, donde $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (la derivada direccional en la direccion del vector unitario que forma ángulo α con el eje de x).

2. Calcular Df para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$.

3. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ (números complejos) por $(x, y) \mapsto x + iy$.
   a) Calcular Df para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$.

   b) Opcional: Calcular Df para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^n$, $n = 3, 4, \ldots$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demuestra que $D_v f(x) = f'(x)v$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $Df = 0$ (o sea, $D_v f(x) = 0$ para todo $x, v \in \mathbb{R}^n$). Demestra que f es constante.

   Sugerencia: dado un $x \in \mathbb{R}^n$, define $g(t) = f(tx)$. Demuestra que $g' = 0$ así que g es constante y en particular $g(0) = g(1)$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ (o, usando números complejos, $f(t) = e^{it}$).
   a) Dibuja la imagen de f en $\mathbb{R}^2$.

   b) Calcula f' y dibuja $f'(t)$ sobre la imagen de f para varios valores de t (suficiente valores para tener idea de lo que sucede).

   Nota: "dibujar" $f'(t)$ significa dibujar una flecha basada en $f(t)$.

   c) Repetir el inciso anterior para f''.

   d) Repetir los incisos anteriores para $f(t) = (t, -t^2)$ ("tiro parabólico").