Cálculo 3: definiciones y resultados, 2 aug – 29 sept

Definiciones:

La norma (estandar) de un vector en $\mathbb{R}^n$, subconjuntos abiertos/cerrados de $\mathbb{R}^n$, sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$, función contínua entre dos subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, un conjunto de nivel de tal función, función difrenciable entre abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, su derivada (o diferencial), derivadas parciales y matriz Jacobiana, gradiente de una función real, punto crítico, vector de velocidad de una curva parametrizada, cambio de coordenadas.

Teoremas:

1. La regla de la cadena.
2. Una función con derivadas parciales continuas es diferenciable.
3. Una función diferenciable es continua.
4. Igualdad de las derivadas parciales mixtas de segundo orden.
5. Un punto mínimo/máximo de una función real diferenciable es un punto crítico.

Definición 1 *La norma (estandar) de un vector* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *en el espacio euclideano* $\mathbb{R}^n$ *se define como* $\|\mathbf{v}\| = \sum_i |v_i|^2$.

Proposición 1 *1.* $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *y* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *ssi* $\mathbf{v} = 0$. *2. Para todo* $c \in \mathbb{R}$, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|v\|$. *3.* $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$.

Definición 2 *Un subconjunto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto si para todo* $\mathbf{x} \in U$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \epsilon \Longrightarrow \mathbf{x}' \in U$. *El complemento de un abierto es un cerrado.*

Nota: el conjunto vacío también se considera abierto.

Proposición 2 *La unión (cualquiera) de abiertos es un abierto, la intersección finita de abiertos es abierto. La interescción (cualquera) de cerrados es un cerrado, la unión finita de cerrados es cerrado.*

Definición 3 *Sea* $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de puntos en* $\mathbb{R}^n$. *Se dice que* $\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$, *ó* $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$, *si* $\lim_{i\to\infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| = 0$.

Proposición 3 *Si* $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_i \to \mathbf{y}$ *entonces* $\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$. *Si además* $c_i \to c$ *(convergencia de sucesión de reales), entonces* $c_i\mathbf{x}_i \to c\mathbf{x}$. *Si* $\{c_i\}$ *es una sucesión acotada de reales y* $\mathbf{x}_i \to 0$ *entonces* $c_i\mathbf{x}_i \to 0$.

Definición 4 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$. *La cerradura de* A *es el conjunto de todo los puntos* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *tal que existe una sucesión en* A *que converge a* $\mathbf{x}$. *El interior de* A *es el complemento de la cerradura del complemento de* A.

Proposición 4 *La cerradura de* A *es un cerrado, y es la interesección de todos los cerrados que contienen a* A. *El interior de* A *es un abierto contenido en* A *y es la unión de todos los abiertos contenidos en* A.

Definición 5 *Sea* $f : A \to B$ *una función entre conjuntos en espacios euclideanos,* $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. *Sea* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{x}_0$ *un punto en la cerradura de* A. *Se dice que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{x} \in A$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| < \epsilon$.

Proposición 5 $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ *ssi para toda sucesión* $\{\mathbf{x}_i\} \subset A$, $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow f(\mathbf{x}_i) \to \mathbf{y}$.

Definición 6 $f : A \to B$ *es contínua en un punto* $\mathbf{x}_0 \in A$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{x} \in A$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$. f *es contínua en* A *si es contínua en todo sus puntos.*

Proposición 6 *f es contínua en $\mathbf{x}_0$ ssi $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, ssi $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_0 \Longrightarrow f(\mathbf{x}_i) \to f(\mathbf{x})$. Sean $y_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones de coordenadas y $f_i = y_i \circ f$ las componentes de f. Entonces f es contínua en $\mathbf{x}_0$ ssi $f_1, \ldots, f_n$ son contínuas $\mathbf{x}_0$.*

Definición 7 *Los conjunto de nivel de una función $f : A \to B$ son los preimagenes de puntos de B; o sea, los conjuntos de la forma $f^{-1}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in A | f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$, donde $\mathbf{y} \in B$. Si $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel de f se llaman* curvas de nivel.

Definición 8 (función diferenciable) *Sea $f : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $V \subset \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in U$ si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que*

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

f es diferenciable en U si es diferenciable en todos sus puntos.

Proposición 7 *La transformación lineal A de la definición de función diferenciable, en caso que existe, es única.*

Definición 9 *La transformación lineal A de la definición de función diferenciable, si existe, se llama la derivada de f en $\mathbf{x}_0$ y se denota por $Df(\mathbf{x}_0)$.*

Teorema 1 (Diferenciabilidad implica continuidad) *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en un $\mathbf{x} \in U$, entonces f es continua en $\mathbf{x}$.*

Definición 10 *Sea $f : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $V \subset \mathbb{R}^m$. Sean $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La derivada*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t},$$

si existe, se llama la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ en la direccion de $\mathbf{v}$ y se denota por $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$.

Proposición 8 *Si f es diferenciable en $\mathbf{x}$ entonces la derivada direccional en este punto existe en todas las direcciones y se tiene que $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$.*

Proposición 9 *f es diferenciable en $\mathbf{x}$ ssi todas sus componenets $f_i : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $\mathbf{x}$. Una transformacíon lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $Df(\mathbf{x}) = f$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. El producto de funciones diferenciables $f, g : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$.*

Teorema 2 (Regla de la cadena) *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abiertos y $W \subset \mathbb{R}^k$. Si $f : V \to W$ y $g : U \to V$ son funciones diferenciables, entonces $f \circ g : U \to W$ es tambien una función diferenciable y para todo $\mathbf{x} \in U$ se tiene que $D(f \circ g)(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{y}) \circ Dg(\mathbf{x})$, donde y $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.*

Nota: la regla de la cadena, la proposición anterior y los ejemplos de funciones diferenciables de cálculo de una variable son la fuente principal de funciones diferenciables en el curso.

Definición 11 *Si $f : U \to \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, la derivada parcial de f con respecto a x_i es la derivada direccional en la dirección del vector $\mathbf{e}_i$ (el i-esimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$), y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ó por f_{x_i}.*

Definición 12 *La matrix Jacobiana de $f : U \to V$ en un $\mathbf{x} \in U$ se define como la matriz de derivadas parciales $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ (si estas derivadas parciales existen).*

Proposición 10 *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un $\mathbf{x} \in U$ entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ existen y la matriz Jacobiana de f en $\mathbf{x}$ es la matriz que representa a la derivada de f en $\mathbf{x}$ con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 3 *Si $f : U \to V$ tiene derivadas parciales contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable.*

Teorema 4 *Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) : U \to \mathbb{R}$ existen y son contínuas entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ para todo i, j.*

Nota: el converso de este teorema (" si $g_1, \ldots, g_n$ son funciones que satisfacen $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ entonces existe una f tal $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$") no es cierto en general pero cierto si nos restringimos a ciertos dominios U. Es un problema delicado e interesante y lo vamos a discutir más tarde en el curso.

Definición 13 *Si $f : U \to V$ es una función diferenciable donde U es un abierto en $\mathbb{R}$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, entonces $f'(t) = Df(t)1 = (f_1'(t), \ldots, f_m'(t))$ es el vector de velocidad de f en $t \in U$.*

Definición 14 *Una función $f : U \to V$, donde U, V son dos abiertos en $\mathbb{R}^n$, es un cambio de coordenadas, si f es diferenciable, biyectiva, y con inversa diferenciable.*

Definición 15 *Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces el gradiente de f en un $\mathbf{x} \in U$ es el vector $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$. Un punto crítico de f es un punto $\mathbf{x} \in U$ en donde el gradiente de f se anula.*

Definición 16 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, donde A es un conjunto cualquiera. Un punto $\mathbf{x} \in A$ es un punto máximo de f si para todo $\mathbf{x}' \in A$ se tiene que $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x})$. El número $f(\mathbf{x})$ es el máximo de f. De manera similar se define un punto mínimo y el mínimo de f.*

Teorema 5 *Un punto máximo o mínimo de una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ es un punto crítico de la función.*

Nota: el converso del teorema no es cierto, como se sabe de cálculo de una variable (puntos de inflexión), pero en cálculo de varias variables la situación es más complicada (e interesante), como vamos a ver más adelante en el curso.