# Exámen parcial núm. 1a

7 oct, 2005

*Hay que resolver el primer problema y 2 de los otros 3. Solo se va a considerar tus problemas con la mejor calificación.*

**Problema 1** (30 pts)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

**(a)** (3 pts) Define: $f$ es diferenciable en $\mathbf{x}$.

**(b)** (3 pts) Define: la derivada direccional de $f$ en $\mathbf{x}$ en la dirección de un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

**(c)** (12 pts) Demuestra: si $f$ es diferenciable en $\mathbf{x}$ entonces la derivada direccional de $f$ en $\mathbf{x}$ existe en todas las direcciones $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

**(d)** (12 pts) Demuestra: si $f$ es una transformación lineal entonces $f$ es diferenciable en $\mathbf{x}$ y encuentra una fórmula para la derivada de $f$ en $\mathbf{x}$.

**Problema 2** (35 pts)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{\sqrt{1 + (x - y)^2}},$$

y sean $\mathbf{x} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$. Calcula

**(a)** (9 pts) las derivadas parciales de $f$ en $\mathbf{x}$;

**(b)** (9 pts) la derivada de $f$ en $\mathbf{x}$;

**(c)** (9 pts) el gradiente de $f$ en $\mathbf{x}$;

**(d)** (8 pts) la derivada direccional de $f$ en $\mathbf{x}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

**Problema 3** (35 pts)

La temperatura de un punto en $\mathbb{R}^2$ está dada por una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$T(x, y) = 100 \cos \frac{\pi}{2}[(x - 1)^2 + y^2].$$

**(a)** (9 pts) Dibuja en el plano $x, y$ la curva isotérmica (=curva de nivel de $T$) que pasa por el punto $(0, 0)$ .

**(b)** (9 pts) Encuentra los puntos críticos de $T$ (los puntos donde el gradiente de $T$ se anula).

**(c)** (9 pts) Encuentra los puntos más frios del plano (puntos mínimos de $T$), y la temperatura en estos puntos.

**(d)** (8 pts) Estás en el punto $(1, 1)$ y decides caminar en la dirección de enfriamiento más rápido posible. Encuentra esta dirección.

**Problema 4** (35 pts)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas de segundo orden y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(r, \theta) = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta$. Expresa el laplaciano $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ en $(x, y) = (1, 2)$ en términos de las derivadas parciales de $F$.

Sugerencia: la función $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(r, \theta) = (x, y)$ es invertible en un abierto alrededor de $(x, y) = (1, 2)$. Expresa la matríz Jacobiana de la inversa de $S$ en términos de la matríz Jacobiana de $S$ (o sea $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$ en términos de $x_r, x_\theta, y_r, y_\theta$). Con esto puedes demostrar que $r_{xx} + r_{yy} = \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $r_x^2 + r_y^2 = 1$, $\theta_x^2 + \theta_y^2 = 1/r^2$ y $r_x\theta_x + r_y\theta_y = 0$.