Exámen parcial núm. 1 - Soluciones

23 sept, 2005

1. *a*) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua.

   $\triangleright$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x' \in \mathbb{R}^n$ satiface $\|x' - x\| < \delta$ entonces $\|f(x') - f(x)\| < \epsilon$, donde para un $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, $\|v\| = [\sum_i v_i^2]^{1/2}$. $\square$

   Nota: la δ depende de la ϵ y de la x. Si no depende de la x se dice que la función es unifomamente contínua.

   b) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

   $\triangleright$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe una trasformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ $f(x + v) = f(x) + Av + E(v)$ y $\lim_{v \to 0} E(v)/\|v\| = 0$. $\square$

   Nota: la transformación lineal A y la funcion E típicamente dependen del punto x. Si la función es diferenciable en un punto x la A se llama "la derivada de f en x", y se denota por $Df(x)$.

   c) Demuestra: si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces es continua.

   $\triangleright$ Sea $x = (x_1, x_2)$. Existen entonces $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+v) = f(x)+Av+E(v)$ y $\lim_{v\to 0} E(v)/\|v\| = 0$. Sea $\delta_1 > 0$ tal que $|E(v)|/\|v\| < 1$ para todo $\|v\| \leq \delta_1$. Como A es lineal, existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $Av = a_1v_1+a_2v_2$. Como $\|v\|^2 = |v_1|^2+|v_2|^2$ tenemos que $|v_i| \leq \|v\|$, $i = 1, 2$. Sea $\epsilon > 0$. Definimos δ como el mínimo entre δ_1 y $\epsilon/(|a_1| + |a_2| + 1)$. Sea $x' \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|x' - x\| < \delta$. Si $x' = x$ entonces $|f(x') - f(x)| = 0 < \epsilon$ y terminamos. Si no, sea $v = x' - x$, entonces $0 < \|v\| < \delta$ y tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &= |f(x + v) - f(x)| = |Av + E(v)| = |a_1v_1 + a_2v_2 + E(v)| \\ &\leq |a_1||v_1| + |a_2||v_2| + |E(v)| \leq \|v\|(|a_1| + |a_2| + |E(v)|/\|v\|) \\ &\leq \delta(|a_1| + |a_2| + 1) \leq \frac{\epsilon}{|a_1| + |a_2| + 1}(|a_1| + |a_2| + 1) = \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

   y sean $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. Calcula *a*) las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en $\mathbf{x}$;

$\triangleright$ Sea $u = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Entonces $f = u/(1+u)$ y usando la regla de la cadena tenemos que $f_{x_i} = [u/(1+u)]' u_{x_i} = 2x_i/(1+u)^2$. En $\mathbf{x} = (1,2,3)$ tenemos que $u = 14$ así que $f_{x_1}(\mathbf{x}) = 2/225$, $f_{x_2} = 4/225$, $f_{x_3} = 6/225$. $\square$

b) la derivada de f en $\mathbf{x}$;

$\triangleright$ $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la transformación lineal $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Df(\mathbf{x})v = f_{x_1}(\mathbf{x})v_1 + f_{x_2}(\mathbf{x})v_2 + f_{x_3}(\mathbf{x})v_3 = (2/225)(v_1 + 2v_2 + 3v_3)$. $\square$

c) el gradiente de f en $\mathbf{x}$;

$\triangleright$ $\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), f_{x_3}(\mathbf{x})) = (2/225, 4/225, 6/225) \in \mathbb{R}^3$. $\square$

d) la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

$\triangleright$ $D_v f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = (2/225)(v_1 + 2v_2 + 3v_3) = (2/225)(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 20/225$. $\square$

3. La superficie de un terreno está dada por la gráfica de la función

$$f(x,y) = 3 - (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4}.$$

a) Dibuja en el plano x, y la curva de nivel de f que pasa por el punto $(0,0)$.

$\triangleright$ Tenemos que $f(0,0) = 3 - 1 - 1 = 1$, así que se pide dibujar la curva de nivel $f = 1$, o sea la curva definida por la ecuación $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 2$. Si cambiamos de variables $X = x - 1$, $Y = y + 2$, se obtiene la ecuación $X^2 + Y^2/4 = 2$, o $(X/a)^2 + (Y/b)^2) = 1$, con $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$. Esta es la ecuación de una elipse, centrada en $(X,Y) = (0,0)$, o sea $(x,y) = (1,-2)$, con semi-eje horizontal a y semi-eje vertical b.

b) Encuentra las coordenadas (x, y, z) del punto más alto del terreno.

$\triangleright$ Como $(x-1)^2 + (y+2)^2/4 \geq 0$ y $= 0$ ssi $x - 1 = y + 2 = 0$, tenemos que

$$f(x,y) = 3 - (x-1)^2 - (y+2)^2/4 = 3 - [(x-1)^2 + (y+2)^2/4] \leq 3,$$

con igualdad ssi $x - 1 = y + 2 = 0$, o sea $(x,y) = (1,-2)$. En este punto $z = f(1,-2) = 3$, así que el punto mas alto del terreno es el punto $(1,-2,3)$. $\square$

c) Estás en la superficie del terreno en el punto $(0,0,1)$ y caminas hacia el este (en la dirección del eje de x positivo). Encuentra la pendiente de tu camino.

Nota: verifique primero que el punto $(0,0,1)$ está en la superficie del terreno.

$\triangleright$ El punto (0,0,1) está en la supeficie del terreno ya que $f(0,0) = 1$. La pendiente es $f_x(0,0) = -2(0-1) = 2$ Es una pendiente de $\arctan(2) = 63^0$ (aprox). $\square$

d) Estás en el punto $(0,0,1)$ y decides caminar en la dirección de bajada mas empinada posible. Encuentra esta dirección.

$\triangleright$ Tenemos que $\nabla f = (f_x, f_y) = (2 - 2x, -1 - y/2)$, y $\nabla f(0,0) = (2,-1)$. Esto es la dirección en donde la función crece más, así que en la dirección opuesta, $(-2,1)$, la función decrece más. $\square$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas de segundo orden y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x, y) = f(u, v)$, donde $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. Determina el laplaciano de F en $(x, y) = (0, 1)$ en términos del laplaciano de f en $(u, v) = (-1, 0)$.

   Nota: el laplaciano de una función $g(s, t)$ es la función $\Delta g = g_{ss} + g_{tt}$.

   Sugerencia: demuestra que $u_x = v_y, u_y = -v_x$ y usa estas relaciones para simplificar la expresión del laplaciano de F en términos del laplaciano de f.

   ▷ Sea $z = f(u, v) = F(x, y)$. Usando la regla de la cadena, Leibnitz, y la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden,

$$
\begin{aligned}
z_x &= z_u u_x + z_v v_x, \\
z_{xx} &= (z_u)_x u_x + z_u u_{xx} + (z_v)_x v_x + z_v v_{xx} = \\
&= (z_{uu} u_x + z_{uv} v_x) u_x + z_u u_{xx} + (z_{vu} u_x + z_{vv} v_x) v_x + z_v v_{xx} = \\
&= z_{uu} u_x^2 + 2 z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx}, \\
z_y &= z_u u_y + z_v v_y, \\
z_{yy} &= (z_u)_y u_y + z_u u_{yy} + (z_v)_y v_y + z_v v_{yy} = \\
&= (z_{uu} u_y + z_{uv} v_y) u_y + z_u u_{yy} + (z_{vu} u_y + z_{vv} v_y) v_y + z_v v_{yy} = \\
&= z_{uu} u_y^2 + 2 z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.
\end{aligned}
$$

   Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= z_{xx} + z_{yy} = \\
&= z_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2 z_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + z_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + z_u(\Delta u) + z_v(\Delta v).
\end{aligned}
$$

   Ahora $u_x = 2x = v_y$, $u_y = -2y = -v_x$, así que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$, $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, $u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0$ y $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = \|\nabla u\|^2$. Subsituyendo esto en la fórmula para ΔF, se obtiente

$$
\Delta F = (z_{uu} + z_{vv})(u_x^2 + u_y^2) = (\Delta f)(\|\nabla u\|^2).
$$

   Ahora $\|\nabla u\|^2 = \|(2x, -2y)\|^2 = 4(x^2+y^2)$. Para $(x, y) = (0, 1)$ tenemos que $\|\nabla u\|^2 = 4$ y $(u, v) = (-1, 0)$, por lo que $\Delta F(0, 1) = 4\Delta f(-1, 0)$.