Material para exámen parcial

Fecha del exámen: 23 sept, 2005

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas de todos los siguientes términos, y conocer ejemplos concretos de cada uno.

La norma (estandar) de un vector en $\mathbb{R}^n$, subconjuntos abiertos/cerrados de $\mathbb{R}^n$, sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$, función contínua entre dos subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, un conjunto de nivel de tal función, función difrenciable entre abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, su derivada (o diferencial), derivadas parciales y matriz Jacobiana, gradiente de una función real, punto crítico, vector de velocidad de una curva parametrizada, cambio de coordenadas.

Teoremas:

Hay que saber los anunciados precisos y las demostraciones de los siguientes teoremas.

- Una función diferenciable es continua.
- Una función con derivadas parciales continuas es diferenciable.
- Igualdad de las segundas derivadas parciales mixtas.
- La regla de la cadena.
- Un punto mínimo de una función real diferenciable es un punto crítico.

Problemas:

1. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $v_1, v_2, \ldots$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:
   a) $\lim_{i\to\infty} v_i = v$.
   b) $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\| = 0$.
   c) $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\|_1 = 0$, donde $\|\cdot\|_1$ denota la suma de los valores absolutos de las componentes de un vector.
   d) Sea $v = (x^1, \ldots, x^n)$, $v_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Entonces $\lim_{i\to\infty} x_i^k = x_i$ para $k = 1, \ldots, n$.
   e) Para todo funcional lineal $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\lim_{i\to\infty} \alpha(v_i) = \alpha(v)$.
   f) Para toda función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_{i\to\infty} f(v_i) = f(v)$.
   g) Cada abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a v contiene a todos los v_i, excepto, posiblemente, un número finito de ellos.

2. Sea $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por $r(x) = \|x\|$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Demuestra que r^α es una función contínua en todo $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \geq 0$ y que para $\alpha < 0$ es contínua en el complemento del origen.
   b) Encuentra los valores de α y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que r^α es diferenciable en x y encuentra el gradiente en tales puntos.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

a) Demuestra que f es diferenciable y encuentra la matriz Jacobiana de f en un punto $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

b) Encuentra un subconjunto abierto maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $V = f(U)$ es abierto y la restricción de f a U define una biyección $U \to V$ cuya inversa es diferenciable.

Sugerencia: la matriz Jacobiana de f debe ser invertible en todos los puntos de U. "Maximal"significa que no existe un abierto $U_1 \supsetneq U$ con las mismas propiedades (a menos que $U = U_1$).

4. Sean v_1, v_2, v_3 tres puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la suma de las distancias a los tres puntos; o sea, $f(v) = \|v - v_1\| + \|v - v_2\| + \|v - v_3\|$.

   a) Demuestra que f es contínua.

   b) Encuentra los puntos $v \in \mathbb{R}^2$ en donde f es diferenciable y calcula el gradiente de f en estos puntos.

   c) Demuestra que un punto $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ es un punto crítico de f ssi lo tres vectores unitarios $v - v_i / \|v - v_i\|$, $i = 1, 2, 3$, forman los vertices de un tríangulo equilátero; o sea, si definimos $u_i = v - v_i / \|v - v_i\|$, entonces $\|u_1 - u_2\| = \|u_2 - u_3\| = \|u_3 - u_1\|$.

   Sugerencia: demuestra primero que $\nabla f = u_1 + u_2 + u_3$. Estudia luego la ecuación $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ para tres vectores unitarios u_1, u_2, u_3.

5. a) Sea $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $m \in \mathbb{R}$. Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = my^2/2 + V(x)$. Demuestra que si una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $mu''(t) = -V'(u(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $E(u(t), u'(t))$ es una función constante.

   Sugerenecia: demuestra, usando la regla de la cadena, que $g(t) = E(u(t), u'(t))$ satisface $g'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   b) (Opcional) Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $m \in \mathbb{R}$. Sea $E : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = m\|y\|^2/2 + V(x)$ (estamos pensando en $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$). Demuestra que si una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface $mu''(t) = -\nabla V(u(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $E(u(t), u'(t))$ es una función constante.

   Nota: el resultado de este problema se llama "la ley de conservación de energía para las soluciones de la ecuación de Newton". Se interpreta así: u representa el movimiento en $\mathbb{R}^n$ de una partícula con masa m bajo la influencia de una fuerza $F = -\nabla V$, donde V es la energía potencial de la párticula, $m\|u'\|^2/2$ es su energía cinética, $E(u(t), u'(t))$ la energía total y $mu'' = F$ es la segunda ley de Newton.