Algebra Lineal 2, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2004.

Tarea num. 9

(Por entregar el viernes, 2 de abr., 2004.)

1. Pág. 313-314: 1,3,9,10.
2. Sean A, B dos operadores lineales en un espacio euclideano. Demuestra que
   (a) $(AB)^* = B^*A^*$,
   (b) $(A+B)^* = A^* + B^*$,
   (c) $(cA)^* = cA^*$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
3. Sean A, B dos operadores lineales autoadjuntos sobre un espacio euclideano.
   (a) Demuestra que si A y B conmutan (o sea $AB = BA$), entonces AB es tambien autoadjunto.
   (b) (Opcional) Averiguar si el converso del inciso anterior es cierto o falso.
4. **Definicion:** un operador lineal sobre un espacio euclideano es *positivo* si es autoadjunto y todos sus valores propios son positivos.
   (a) Demuestra que un operador lineal autoadjunto $L : V \to V$ en un espacio euclideano es positivo ssi $(v, Lv) > 0$ para todo $v \neq 0$.
   (b) (Opcional) Demuestra que la condición "autoadjunto" no se puede eleminar en el inciso anterior. O sea, encuentra un ejemplo de un L que no es auto-adjunto y que $(v, Lv) > 0$ para todo $v \neq 0$.
   (c) Demuestra que una transformación lineal $T : V_1 \to V_2$ entre dos espacios euclideanos es inyectiva ssi T^*T es positivo y es suprayectiva ssi TT^* es positivo.
   (d) Demuestra que todo operador positivo tiene una raíz positiva única; o sea, si P es un operador positivo, entonces existe un único operador positivo Q tal que $P = Q^2$.
   (e) Sea T un operador lineal en un espacio euclideano. Definimos una forma bilineal en V por $(v, w)_T := (v, Tw)$. Demuestra que
      (i) $(\ ,\ )_T$ es una forma bilineal.
      (ii) $(\ ,\ )_T$ es un producto interno en V ssi T es positivo.
      (iii) Demuestra que la asignación $T \mapsto (\ ,\ )_T$ define una biyección entre el conjunto de los operadores positivos en V y el conjunto de los productos internos en V.
   (f) Demuestra que todo operador invertible T se puede expresar, de manera única, como $T = PE$, donde P es positivo y E es una isometría. (Nota: $T = PE$ se llama la *decomposición polar* de T).
   Sugerencia: define P como la raiz cuadrada de TT^* y demuestra que $E := P^{-1}T$ es ortogonal. No se te olvide la unicidad.
   (g) Encuentra la descomposición polar del operador T en $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x+y, y)$.