Corección y solución del problema 2 de la tarea núm. 8

En el anunciado del problema 2 de la tarea 8 había un error. El anunciado correcto es:

2. Demuestra que toda isometría T de $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico), es (1) una rotación por cierto ángulo alrededor de un eje, o (2) una rotación por cierto ángulo alrededor de un eje, seguida por una reflección por el plano ortogonal al eje. Demuestra también que los casos (1) y (2) corresponden a $det(T) = 1$ y $det(T) = -1$ (resp.).

Solución: En $\mathbb{R}^3$ todo operador tiene un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, ya que el polinomio característico tiene grado 3 (impar). Por otro lado, como T es una isometría, sus únicos valores propios (reales) posibles son $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ (demostrado en clase). Sea $v_1 \in \mathbb{R}^3$ un vector propio unitorio asociado, $\|v_1\| = 1$, $W = \langle v_1 \rangle$. Entonces $W \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio de dimensión 1, invariante bajo T.

Lema: Si $T : V \to V$ es una isometría de un espacio euclideano y $W \subset V$ es un subespacio invariante bajo T (o sea, $T(W) \subset W$), entonces su complemento ortogonal $W^\perp$ es tambien invariante bajo T.

Demostración: Como T es una isometría es invertible y su inversa T^{-1} es tambien una isometría (ejercicio). Tenemos entonces que $T(W) = W$ (ya que $T(W) \subset W$ y $T(W)$ tiene la misma dimensión que W, por ser T inyectiva). Así que W es tambien invariante bajo T^{-1}.

Sea ahora $w' \in W^\perp$. Tenemos que demostrar que $Tw' \in W^\perp$. Para todo $w \in W$ tenemos que

$$(Tw', w) = (T^{-1}Tw', T^{-1}w) = (w', T^{-1}w) = 0,$$

ya que $T^{-1}w \in W$. $\square$

El lema implica que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, invariante bajo T. La restricción de T a $W^\perp$ es una isometría, así que, como hemos demostrado en clase, es una rotación por cierto ángulo, o reflexión por una linea en este plano. Tenemos entonces los siguientes casos:

(1) $\lambda = 1$ y T se restringe en $W^\perp$ a una rotación por cierto ángulo. En este caso T es una rotación alrededor del "eje" W y $det(T) = 1$. Para ver esto eligimos una base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ en $W^\perp$ y tenemos, con rspecto a la base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

así que $\det(T) = 1 \cdot (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = 1$.

(2) $\lambda = 1$ y T se restringe en $W^\perp$ a una reflexión por una linea, generada por un vector unitario $v_2 \in W^\perp$. Completamos v_2 a una base ortonoramal v_2, v_3 de $W^\perp$, así que $Tv_3 = -v_3$.

En este caso tenemos que T es una reflexión por el plano generado por $\{v_1, v_2\}$ y en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matriz de T es

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

así que $\det(T) = -1$.

(3) $\lambda = -1$ y T se restringe en $W^\perp$ a una rotación por cierto ángulo. Usando la misma base B como en caso (1), tenemos que la matriz de T es

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

así que T es una rotación alrededor del "eje" W seguida por una reflexion for el plano $W^\perp$.

(4) $\lambda = -1$ y T se restringe en $W^\perp$ a una reflexión por una linea, generada por un vector unitario $v_2 \in W^\perp$. Usando la misma base B como en caso (2), tenemos que la matriz de T es

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

así que $\det(T) = 1$. Notamos que en este caso T se puede describir como una reflexión por el eje generado por v_2, o sea una rotación por 180^0 alrededor de este eje.

En resumen, tenemos que si $\det(T) = 1$ (casos (1) y (4)) T es una rotación alrededor de un eje, y si $\det(T) = -1$ (casos (2) y (3)) T es una rotación alrededor de un eje seguida por una reflexión por el plano ortogonal al eje (el caso (2) es un caso especial de esto, cuando la parte de "rotación" es por 0 grados, o sea la identidad).