Tarea num. 4 – soluciones

Nota: en esta tarea usamos la siguiente caracterización de la función determinante: *si $D : Mat_{n\times n}(F) \to F$ es una función que asigna a cada matriz A un número $D(A) \in F$, tal que (1) D es lineal en cada columna de A, (2) D es alternada en las columnas de A (i.e. $D(A) = 0$ si A tiene dos columnas que coinciden) y (3) $D(I) = 1$, donde I es la matriz indetidad, entonces $D = \det$.*

Este resultado es una consequencia de nuestro "teorema fundamental de la función determinante": *Para un espacio vectorial de dimensión n, $dim\Lambda^n(V^*) = 1$. Explicitamente, si fijamos una base $e_1, \ldots, e_n$, entonces cada función n-lineal alternada en V es de la forma $f(v_1, \ldots, v_n) = det(A)f(e_1, \ldots, e_n)$, donde la matriz $A = (a_{ij})$ está dada por $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, $j = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Sea $V := F^n$, y $f : V^n \to F$ dado por $f(v_1, \ldots, v_n) = D(A)$, donde A es la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$. Entonces (l) D lineal en cada columna de $A \Longrightarrow f$ es multilineal, (2) D alternada en columnas $\Longrightarrow f$ es alyternada y (3) $D(I) = 1 \Longrightarrow f(e_1, \ldots, e_n) = 1$ donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de F^n. Nuestro "teorema fundamental" implica ahora que $D(A) = f(v_1, \ldots, v_n) = \det(A)$.

1. (a) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ con entradas en un campo F y $\sigma \in S_n$. Demuestra que

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Demostración: si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, $\alpha \in S_n \Longrightarrow x_1x_2\cdots x_n = x_{\alpha(1)}x_{\alpha(2)}\cdots x_{\alpha(n)}$, ya que el producto de números no depende de su orden. Tomando $x_i := a_{\sigma(i)i}$, $\alpha := \sigma^{-1}$, obtenemos el resultado requerido.

(b) Usando el inciso anterior, demuestra que $\det(A^t) = \det(A)$.

Demostración:

$$\begin{array}{rcll}
\det(A) & = & \sum_{\sigma\in S_n} signo(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} & \text{por definición} \\
& = & \sum_{\sigma\in S_n} signo(\sigma)\ a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} & \text{por el inciso anterior} \\
& = & \sum_{\sigma\in S_n} signo(\sigma^{-1})\ a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} & \text{ya que } signo(\sigma^{-1}) = signo(\sigma) \\
& = & \sum_{\alpha\in S_n} signo(\alpha)\ a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}\cdots a_{n\alpha(n)} & \text{substituyendo } \alpha := \sigma^{-1} \\
& = & \det(A^t) & \text{por definición}
\end{array}$$

(c) Demuestra, directamente de la fórmula que define a $\det(A)$, que $\det(A)$ es multilineal y alternada en las *filas* de A.

Demostración: la expresión para $\det(A)$ es multilineal en filas ya que cada uno de sus $n!$ términos es multilineal en filas: en cada $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$ aparece solamente una entrada de cada fila (σ es inyectiva). Para demostrar que la expresión es alternada en filas, tenemos que demostrar que $\det(A) = 0$ cuando coinciden dos de las filas de A, digamos las filas k y l; o sea, $a_{kj} = a_{lj}$, $j = 1, \ldots, n$. Sea $\tau \in S_n$ la transposición que intercambia k con l. Entonces $a_{ij} = a_{\tau(i)j}$, para todo i, j en $\{1, \ldots, n\}$. Así que

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{\tau\sigma(1)1}a_{\tau\sigma(2)2}\cdots a_{\tau\sigma(n)n},$$

para todo $\sigma \in S_n$. Ahora consideramos en la suma que define a $\det(A)$ un par de términos que coresponden a las permutaciones $\{\sigma, \tau\sigma\}$. Por lo anterior, y por lo que $signo(\tau\sigma) = signo(\tau)signo(\sigma) = -signo(\sigma)$, tenemos que la suma de estos dos términos se anula,

$$signo(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} + signo(\tau\sigma)\ a_{\tau\sigma(1)1}a_{\tau\sigma(2)2}\cdots a_{\tau\sigma(n)n} = 0.$$

Si agrupamos todos los $n!$ términos en la fórmula que define a $\det(A)$ en tales parejes y sumamos obtenemos de esta manera que la suma se anula.

(d) Usando el inciso anterior, demuestra que $\det(A^t) = \det(A)$.

Demostración: El inciso anterior demuestra que $\det(A^t)$ es una función multilineal y alternada en las filas de A^t, o sea en las columnas de A, como la es $\det(A)$. Ademas, para $A = I$ (la matriz identidad) $\det(I^t) = \det(I)$. Por el teorema de unicidad de la función determinante concluyimos que $\det(A^t) = \det(A)$ para toda matriz A.

2. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ con coeficientes en un campo F. Denota por $D_{ij}(A)$ la determinante de la matriz que se obtiene de A al eliminar en ella la fila i y la columna j.

(a) Demuestra que para todo $i = 1, \dots, n$, $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A)$ ("el desarrollo de $\det(A)$ según la fila i"), y que para todo $j = 1, \dots, n$, $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$ ("el desarrollo según la columna j").

Demostración: Primero estudiamos el desarrollo en filas: demostramos que el desarrolo en cada fila i es (1) multilineal en las columnas de A, (2) alternada en las columnas de A y (3) da el valor 1 para $A = I$ (la matriz identidad).
Denotamos por A_{ij} la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A al eliminar en ella la fila i y la columna j, así que $D_{ij}(A) = det(A_{ij})$. Además, denotamos por $v_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})^t$ la k-esima columna de A.

(1) multilineal: demostramos que cada término $a_{ij} det(A_{ij})$ es lineal en cada v_k. Si $k = j$, a_{ij} es una de las coordenadas de v_k, así que es lineal en v_k, y A_{ij} no depende de v_k, así que $det(A_{ij})$ es constante. Si $k \neq j$, a_{ij} no depende de v_k, así que es una constante, y $det(A_{ij})$ es lineal en v_k, ya que $det(A_{ij})$ es lineal en las columnas de A_{ij} y v_k (menos la coordenada a_{ik}) aparece como una de las columnas de A_{ij}.

(2) alternada: suponemos que las columnas k y l de A coinciden, $k < l$, i.e. $v_k = v_l$. Para j distinto de k y l, en A_{ij} hay dos columnas iguales, por lo que $det(A_{ij}) = 0$. Ahora, como $v_k = v_l$, A_{ik} se obtiene de A_{il} al mandar la k-sima columna de A_{il} a la columna l y mandar las columnas $k+1, \dots, l$ a las columnas $k, \dots, l-1$ (resp.). Este cambio se puede realizar mediante $k - l - 1$ transposiciones de columnas, así que $det(A_{il}) = (-1)^{k-l-1} det(A_{ik})$. Además, $v_k = v_l$ implica que $a_{ik} = a_{il}$. Así que la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) &= (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) + (-1)^{i+l} a_{il} det(A_{il}) = \\ &= a_{ik} \det(A_{ik})[(-1)^{i+k} + (-1)^{i+l}(-1)^{k-l-1}] = 0. \end{aligned}$$

(3) Para $A = I$, $a_{ij} = det(A_{ij}) = \delta_{ij}$, así que $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \delta_{ij} \delta_{ij} = 1$.

Esto concluye la demostración para el desarrollo en filas. Para el desarrolo en columnas, notamos que el desarrollo en una columna de A conicide con el desarrollo en una fila de A^t: $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A_{ij}]^t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A^t]_{ji})$, y el último es el desarrollo de $\det(A^t)$ segun la fila j, así que da $\det(A^t)$. Ahora aplicamos $\det(A^t) = \det(A)$.

(b) Define la *matriz adjunta* de A por $adj(A)_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ji}(A)$ (la transpuesta de la matriz de cofactores de A). Demuestra que $A\, adj(A) = \det(A) I$.

Demostración: La entrada ij de $A\, adj(A)$ es $\sum_k a_{ik}(-1)^{j+k} D_{jk}(A)$. Si $i \neq j$ esto es el desarrollo a lo largo de la fila j de la determinante de la matriz que se obtiene de A al substituir su fila j por su fila i. Esta es una matriz con dos filas repetidas así que su determinante se anula. Para $i = j$ es el desarrollo a lo largo de la fila i de la determinante de A.

3. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal en un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F. En este ejercisio vemos como definir la detrminante de T.

(a) Demuestra que existe una única constante $c \in F$ tal que para toda función $f \in \Lambda^n(V^*)$,

$$f(Tv_1, \dots, Tv_n) = cf(v_1, \dots, v_n),$$

para todo $v_1, \dots, v_n \in V$.

Demostración: La función T^*f definida por $T^*f(v_1, \dots, v_k) := f(Tv_1, \dots, Tv_n)$ es multilineal y alternada (ver tarea 3), o sea $T^*f \in \Lambda^n(V^*)$. Es facil verificar que $T^* : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$ es lineal. Como $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, T^* es una multiplicación por un escalar $c \in F$, o sea $T^*f = cf$, para todo $f \in \Lambda^n(V^*)$.

(b) Demuestra que la constante c del inciso anterior satisface $c = \det(A)$, donde A es la matriz de T con respecto a una base de V.

Demostración: Sea $f \in \Lambda^n(V^*)$. La función $T^*f \in \Lambda^n(V^*)$ (usando la notación de la demostración del inciso anterior) está determinada por su valor en una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de T con respecto a esta base $\Longrightarrow Te_j = \sum_i a_{ij}e_i \Longrightarrow T^*f(e_1, \ldots, e_n) = f(Te_1, \ldots, Te_n) = \det(A)f(e_1, \ldots, e_n)$, así que $T^*f = \det(A)f$.

(c) Concluye del inciso anterior que la determinante de la matriz de una transformación lineal en un espacio vectorial no depende de la base del espacio vectorial usada para encontrar la matriz (aunque la matriz misma típicamente sí depende de la base.)

Demostración: La definición de A (la matriz de T) depende de la elección de una base en V, así que $\det(A)$ tambien depende de tal base (potencialmente). Pero luego resulta que $\det(A) = c$, donde c es una constante cuya definición no ultiliza la elección de una base. Así que $\det(A)$ no depende de la base elejida para calcular A.

(d) Demuestra el inciso anterior usando la fórmula para cambio de matriz, $A \mapsto FAF^{-1}$, donde F es la matriz de cambio de base.

Demostración: Si cambiamos de base, la matriz de T cambia a la matriz $A' = FAF^{-1}$, donde F es la matriz de cambio de base. Luego tenemos que $\det(A') = \det(FAF^{-1}) = \det(F)\det(A)\det(F^{-1}) = \det(F)\det(F^{-1})\det(A) = \det(FF^{-1})\det(A) = \det(I)\det(A) = \det(A)$, ya que $\det(I) = 1$.

Definición: $\det(T) := \det(A)$, donde A es la matriz de T con respecto a una base de V (cualquera).

4. (Opcional) Para cada permutación $\sigma \in S_n$ definimos $T_\sigma : F^n \to F^n$ por

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

(a) Demuestra que T_σ es una transformación lineal y encuentra su matriz con respecto a la base canónica.

Demostración: (1) Sean $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n)$, $c \in F$, así que $v + w = (z_1, \ldots, z_n)$, donde $z_i = x_i + y_i$. Entonces $T_\sigma(v + w) = T_\sigma(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) = (x_{\sigma(1)} + y_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)} + y_{\sigma(1)}) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) + (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) = T_\sigma(v) + T_\sigma(w)$. Luego , $T_\sigma(cv) = T_\sigma(cx_1, \ldots, cx_n) = (cx_{\sigma(1)}, \ldots, cx_{\sigma(n)}) = cT_\sigma(v)$. Así que T_σ es lineal.

(2) Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica. Según la definición de T_σ, la coordenada i de $T_\sigma v$ es la coordenada $\sigma(i)$ de v. Para $v = e_j$, obtenemos que la coordenada i de $T_\sigma e_j$ es la coordenada $\sigma(i)$ de e_j, o sea $\delta_{\sigma(i)j}$. Tenemos entonces que la matriz de T_σ es una matriz que tiene en su columna j el número 1 en el lugar $i = \sigma^{-1}(j)$, el resto zeros.

(b) Encuentra una relación entre T_{σ_1}, T_{σ_2} y $T_{\sigma_1\sigma_2}$.

Respuesta: Sea $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = T_{\sigma_1}(v) = (y_1, \ldots, y_n)$; o sea, $y_i = x_{\sigma_1(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Para $i = \sigma_2(j)$, tenemos $y_{\sigma_2(j)} = x_{\sigma_1\sigma_2(j)}$, $j = 1, \ldots, n \Longrightarrow T_{\sigma_1\sigma_2}v = (x_{\sigma_1\sigma_2(1)}, \ldots, x_{\sigma_1\sigma_2(n)}) = (y_{\sigma_2(1)}, \ldots, y_{\sigma_2(n)}) = T_{\sigma_2}w = T_{\sigma_2}T_{\sigma_1}v, \Longrightarrow T_{\sigma_1\sigma_2} = T_{\sigma_2}T_{\sigma_1}$.

(c) Encuentra $\det(T_\sigma)$.

Respuesta: Para una transposición τ, la matriz de T_τ, con respecto a la base canónica, se obtiene de la matriz identidad por un intercambio de dos columnas, así que $\det(T_\tau) = -1$. Para una permutación general σ, la escribimos como un producto de transposiciones, $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m$, y aplicamos el inciso anterior: $T_\sigma = T_{\tau_m}T_{\tau_{m-1}} \cdots T_{\tau_1} \Longrightarrow \det(T_\sigma) = \det(T_{\tau_m})\det(T_{\tau_{m-1}}) \cdots \det(T_{\tau_1}) = (-1)^m = signo(\sigma)$.