Examen Parcial núm. 1 – soluciones

Parte A (75 puntos, 5 puntos cada inciso)

Responder a cada inciso primero con "cierto" o "falso", seguido por una explicación breve (no se requiere una demostracíon completa).

NOTA: todos los espacios vectoriales en esta parte son de dimensión finita.

1. Si A es una matriz cuadrada tal que $det(A) = 0$ entonces A no es invertible.

$\triangleright$ Cierto. Si A es invertible entonces existe una B tal que $I = AB \implies 1 = det(I) = det(AB) = det(A)det(B) \implies det(A) \neq 0$.

2. Si A, B son dos matrices $n \times n$ entonces $det(A + B) = det(A) + det(B)$.

$\triangleright$ Falso. $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies det(A + B) = det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$, pero $det(A) + det(B) = 1 + 1 = 2 \neq 4$.

3. Cada transposición es una permutación impar.

$\triangleright$ Cierto. Por definicón, una permutación impar es una permutación $\sigma \in S_n$ que cambia el orden de un número impar de pares de elementos en el rango $1, 2, \ldots, n$. Una transposición intercambia dos elementos, digamos i y j, $i < j$, y deja a los demas elementos en su lugar. Así que los pares de elementos cuyo orden cambia son (i, k), $k = i + 1, \ldots, j$ y (k, j), $k = i + 1, \ldots, j - 1$. En total son $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ pares, un número impar.

4. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes enteros (en $\mathbb{Z}$) tal que $det(A) = 1$. Entonces A es invertible y su inversa tambien tiene coeficientes enteros.

$\triangleright$ Cierto. $A^{-1} = adj(A)/det(A)$, así que $A^{-1} = adj(A)$. Pero las entradas de la matriz $adj(A)$ son combinaciones lineales, con coeficientes 1 o -1, de productos de elementos de A, así que son tambien números enteros.

5. Un sistema de n ecuaciones lineales (homogeneo o no) con n incognitas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, tiene una solución única si y solo si la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ satisface $det(A) \neq 0$.

$\triangleright$ Cierto. Una solución del sistema es un vector $\mathbf{v} \in F^n$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Luego, $det(A) \neq 0$ ssi $A : F^n \to F^n$ es invertible, o sea una biyección, ssi para cada $\mathbf{b} \in F^n$ existe un único $\mathbf{v} \in F^n$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$.

6. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $v_1, v_2 \in V$ dos vectores propios de T que pertenecen a distintos valores propios. Entonces $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

$\triangleright$ Cierto. Es un caso particular de una proposición (demostrada en clase): si $v_1, \ldots, v_k$ son vectores propios que pertenecen a valores propios distintos de un operador lineal, entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.

7. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $v_1, v_2 \in V$ dos vectores propios de T que pertenecen al mismo valor propio. Entonces $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente.

$\triangleright$ Falso. Basta tener un ejemplo de un operador lineal con un valor propio cuyo espacio propio asociado es de dimensión mayor que 1. Por ejemplo, el operador identidad en un espacio vectorial de dimension mayor que 1: para este operador todo el espacio es el espacio propio asociado con valor propio 1.

8. Si T es un operador lineal invertible diagonalizable entonces T^{-1} es tambien diagonaizable.

$\triangleright$ Cierto. T diagonalizable significa que existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores propios de T, o sea una base en donde la matriz de T es diagonal. Los elementos de esta misma base son tambien vectores propios de T^{-1}: $Tv = \lambda v \implies v = \lambda T^{-1} v \implies T^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v$ (nota que $\lambda \neq 0$ ya que T es invertible, o sea $\mathrm{Ker} T = \{0\}$). Así que la matriz de T^{-1} en esta base es diagonal.

9. Una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y solo si 0 no es un valor propio de T.

$\triangleright$ Cierto. T es invertible ssi $\mathrm{Ker} T = \{0\}$, ssi no existe un vector no nulo v tal que $Tv = 0$, o sea 0 no es un valor propio de T.

10. Todo operador lineal (en un espacio vectorial de dimensión finita) tiene un espectro finito. (Nota: el espectro de un operador es el conjunto de sus valores propios).

$\triangleright$ Cierto. Es una consecuencia del resultado (demostrado en clase): un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n tiene a lo mas n valores propios (demostración: los valores propios son las raices del polinomio característico, lo cual tiene grado n; un polinomio de grado n tiene a lo mas n raices.)

11. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sin valores propios.

$\triangleright$ Falso. Los valores propios de T son las raices de su polinomio característico, un polinomio de grado 5 con coeficientes reales. Pero un polinomio de grado impar con coeficientes reales simepre tiene por lo menos una raiz (usando el teorema de valor intermedio).

12. Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal cuya matriz, con respecto a la base canónica, tiene coeficientes reales. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T entonces $\bar{\lambda}$ es tambien un valor propio.

$\triangleright$ Cierto. $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio ssi es una raíz del polinomio característico de T, o sea $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = 0$. Como las entradas de la matriz de T son reales, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales, o sea $\overline{a_i} = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, por lo que conjugando la ecuación $p(\lambda) = 0$ obtenemos $p(\bar{\lambda}) = 0$, o sea $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T.

13. Existen dos permutaciones $\sigma_1, \sigma_2 \in S_4$ tal que $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$.

$\triangleright$ Cierto. Sean $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\implies$ $(\sigma_1\sigma_2)(1) = 2$, $(\sigma_2\sigma_1)(1) =$ $\implies$ $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$.

14. Todo operador lineal diagonalizable es invertible.

$\triangleright$ Falso. El operador 0 es diagonalizable (con respecto a cual quer base), pero no es invertible.

15. Si un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos entonces el detrminante de T es el producto de sus valores propios.

$\triangleright$ Cierto. En la base de los vectores propios asociados, la matriz de T es diagonal, con los valors propios sobre el diagonal. El determinante de una matriz diagonal es el producto de las entradas en el diagonal.

Parte B (25 puntos)
Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador definido por $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$. Encunetra los valores propios de T y sus espacios propios asociados.

$\triangleright$ Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$. Entonces $Te_1 = e_3$, $Te_2 = e_1$, $Te_3 = e_2$, así que la matriz de T con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 1$. Una raíz obvia es $\lambda = 1$. Con este obtenemos $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Las raices del factor cuadrático son $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ y $\bar{\omega} = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

(Nota: Las tres raices $1, \omega, \bar{\omega}$ se llaman las "raices cúbicas de 1" y se ubican en el plano $\mathbb{C}$ en los 3 vertices de un tríangulo equilatero circumscrito por el círculo de radio 1 con centro en el origen.)

Espacios propios: como tenemos 3 valores propios distintos, sabemos que cada espacio propio tiene dimensión 1, así que tenemos que encontrar 3 vectores propios v_1, v_2, v_3, uno para cada una de las raices $1, \omega, \bar{\omega}$ (resp.).

$\underline{\lambda = 1}$: un vector propio obvio es $v_1 := (1, 1, 1)$, ya que $T(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$.

$\underline{\lambda = \omega}$: resolvemos el sistema $(A - \omega I)v = 0$, o sea

$$\begin{pmatrix} \omega & -1 & 0 \\ 0 & \omega & -1 \\ -1 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \omega z_1 - z_2 & = 0 \\ \omega z_2 - z_3 & = 0 \\ -z_1 + \omega z_3 & = 0 \end{cases}.$$

Tomando $z_1 = 1 \implies z_2 = \omega \implies z_3 = \omega^2 = \bar{\omega} \implies v_2 := (1, \omega, \bar{\omega})$ es un vector propio.

$\underline{\lambda = \bar{\omega}}$: como A es una matriz real, $\overline{A} = A$, podemos tomar el conjugado del vector encontrado para $\lambda = \omega$: $Av_2 = \omega v_2 \implies A\bar{v}_2 = \bar{\omega}\bar{v}_2 \implies v_3 := \bar{v}_2 = (1, \bar{\omega}, \omega)$ es un vector propio que pertenece a $\lambda = \bar{\omega}$.