Material para el examen final

31 de mayo, 2004

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas de todos los siguientes términos, y conocer ejemplos concretos de cada uno.

Determinantes: Forma multilineal/alternada, permutación, transposición, el signo de una permutación, la determinante de un operador/matriz, la adjunta de una matriz cuadrada (formada por los menores), matriz/operador invertible/singular, valor/vector propio de un operador/matriz, espectro de un operador/matriz, el sub-espacio propio asociado a un valor propio de un operador/matriz, operador/matriz diagonalizable, matrices semejantes/conjugadas, polinomio, el anillo de polinomios (con coeficientes en un campo), el polinomio característico/mínimo de un operador/matriz.

Espacios euclideanos/hermitianos: producto interno/punto/escalar/hermitiano, norma, vectores/subespacios ortogonales, el ángulo entre dos vectores, bases ortonormales/unitarios, el proceso de Gram-Schmidt, una isometría (entre espacios euclideanos/hermitianos), proyección ortogonal en subespacio, complemento ortogonal, el adjunto de un operador, operador autoadjunto, matriz ortogonal/unitaria/hermitiana; forma cuandrática; operador normal. sección cónica, parábola (su foco y su directriz), hipérbola/elipse (sus focos), congruencia (en un espacio euclideano).

Formas canónicas: suma directa de subespacios, subespacio invariante, suma directa de operadores, el anulador de un operador, ideal de un anillo, el ideal generado por un elemento en un anillo, ideal principal; operador nilpotente, vector cíclico, la forma de Jordan de un operador (en un espacio vectorial complejo); espacio cociente y la proyección canónica. Triangulación de un operador.

Teoremas:

Hay que saber las demostraciones de los siguientes teoremas y sus corolorios.

1. El teorema de existencia y unicidad de la función determinante: Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en un espacio vectorial V de dimension n sobre un campo F, existe una única n-forma alternada f en V tal que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

   En fórmulas: $f(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$, donde $A = (a_{ij})$ es las matriz de las coordenadas de los vectores $v, \dots, v_n$ con respecto a la base dada, $v_j = \sum_i a_{ij} e_i$, $\det(A) = \sum_\sigma signo(\sigma) \Pi_i a_{i\sigma(i)} = \sum_i (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \sum_j (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, y A_{ij} es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

2. Un operador lineal T es invertible ssi $\det(T) \neq 0$.

   En caso de ser invertible la inversa está dada por $A^{-1} = adj(A)/\det(A)$, donde $[adj(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$.

3. Si T, S son dos operadores lineales en un espacio vectorial entonces $\det(TS) = \det(T)\det(S)$.

4. El proceso de Gram-Schmidt: todo conjunto ortonormal en una espacio euclideano se puede completar a una base ortonormal.
5. La desigualdad de Cauchy-Schwartz: si v, w son dos vectores en un espacio euclideano o hermitiano, entonces $|(v, w)| \leq \|v\|\|w\|$ con igualdad ssi los dos vectores son linealmente dependientes.
6. El teorema de representación de Riesz: para todo funcional lineal α en un espacio euclideano o hermitiano V, existe un único vector $w \in V$ tal que $\alpha(v) = (v, w)$ para todo $v \in V$.
7. Existencia y unicidad de la adjunta: dado un operador lineal T en un espacio euclideano (resp. hermitiano) V, existe un único operador T^* que satisface $(Tv, w) = (v, T^*w)$ para todo $v, w \in V$.
8. Todo operador autoadjunto en un espacio euclideano (resp. hermitiano), es diagonalizble mediante una base ortonormal (resp. unitaria).
9. Dos espacios vectoriales euclideanos (resp. hermitianos) son isométricos ssi tienen la misma dimensión.
10. El teorema funadamental del álgebra: todo polinomio en una variable con coeficientes complejas tiene por lo menos una raíz compleja. (Nota: no es necesario saber la demostración de este teorema, ya que no vimos una demostración rigurosa en el curso).
11. En un espacio hermitiano, un operador es diagonalizable mediante una base unitaria ssi es normal.
12. Clasificación de secciones cónicas: toda sección cónica en el plano $\mathbb{R}^2$ es uno de los siguientes subconjuntos: elipse, hipérbola, parábola, o una seccion "degenerada"(par de lineas, una linea, un segmento, un punto, o el conjunto vacío).
13. Todo ideal de $F[x]$ es principal (donde F es un campo).
14. El teorema de Cayley-Hamilton: todo operador lineal está anulado por su polinomio característico.
15. Todo operador lineal en un espacio vectorial complejo es triangulizable.
16. Teorema de Jordan: todo operador lineal en un espacio vectorial complejo se puede representar con una matriz en forma de Jordan en una base apropiada; además, esta matriz es única (salvo el orden de sus bloques).

Problemas:

1. Sea $T : V \to V$ un operador lineal y A la matriz de T con respecto a una base en V. Demuestra que A es semejante a una matriz diagonal ssi T es diagonalizable (existe en V una base de vectores propios de T).
2. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de un operador lineal T, con vectores propios asociados $v_1, \ldots, v_k$ (es decir, los v_i son vectores no nulos y $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$). Demuestra que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.
3. (a) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz triangular superior ($a_{ij} = 0$ para $i < j$). Demuestra que $\det A = \Pi_i a_{ii}$ (el producto de los elementos en el diagonal).

(b) Sea A una matriz "triangular superior en bloques",

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & A_k \end{pmatrix},$$

donde cada A_i, $i = 1, \ldots, k$, es una matriz cuadrada de tamaño $r_i \times r_i$. Demuestra que $\det(A) = \Pi_i \det(A_i)$.

4. Calcular las siguientes determinantes:

(a) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$

(b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$

5. (a) Sean $p(x), q(x) \in F[x]$ dos polinomios de grado n con coeficientes en un campo F y con n raíces en común; es decir, existen distintos $x_1, \ldots, x_n \in F$ tal que $p(x_i) = q(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Demuestra que existe un $c \in F$ tal que $p(x) = cq(x)$.

(b) Dados $n+1$ elementos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en un campo (o un anillo conmutativo) se define *la determinante de Vandermonde* (1735-1796) como

$$\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i<j}(x_j - x_i)$ (el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$, donde $0 \leq i < j \leq n$).

Por ejemplo, para $n = 2$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0).$$

Sugerencia: es posible verficar directamente esta fórmula, pero es tedioso; una idea mas inetersante es la siguiente: fijamos n valores distintos $x_1, \ldots, x_n$. Demuestra que ambos funciones, $\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ y $\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$, consideradas como funciones de x_0 (con los n escalares $x_1, \ldots, x_n$ como parámetros), son polinomios de grado n, con n raíces en común. Usa ahora el inciso anterior.

6. Dado un operador lineal T en un espacio vectorial se define un operador lineal $\tilde{T}$ en $\text{End}(V)$ (el espacio vectorial de todos lo operadores lineales en V) por la fórmula $\tilde{T}(S) = TS$. Encuentra una relación entre las determinantes de $\tilde{T}$ y T.

7. Se define la *traza* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ como la suma de los elementos en la diagonal: $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestra lo siguiente:

   (a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

   (b) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

   (c) Usando el inciso anterior, demuestra que se puede definir la traza de un operador lineal como la traza de la matriz que le representa en una base; es decir, dicha traza no depende de la base seleccionada para representar el operador.

   (d) Sea T un operador lineal. Expresa $\text{tr}(T)$ en términos de uno de los coeficientes del polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - T)$. (Nota: esto da una demostración alternativa del inciso anterior.)

   (e) Sea V un espacio euclideano (resp. hermitiano). Demuestra que la fórmula $(T, S) = \text{tr}(TS^*)$ define en $\text{End}(V)$ un producto escalar (resp. hermitiano).

   (f) Con la notación del inciso anterior, encuentra el complemento ortogonal en $\text{End}(V)$ del subespacio de los operadores autoadjuntos. (Respuesta: los operadores que satisfacen $T^* = -T$.)

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador dado por $T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ y sea A la matriz de T con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

   (a) Encuentra A, demuestra que es invertible y encuentra su inversa.

   (b) Demuestra que T es autoadjunto (con respecto al producto punto usual en $\mathbb{R}^3$).

   (c) Encuentra el polinomio caracteristico de T y sus valores propios.

   (d) Encuentra una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ de vectore propios de T.

   (e) Encuentra una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que $PAP^{-1} = D$.

   (f) Encuentra un subespacio 1-dimensional T-invariante $W \subset \mathbb{R}^3$.

   (g) Encuentra la matriz del operador inducido por T en $\mathbb{R}^3/W$ con respecto a tu base favorita.

   (h) Encuentra el polinomio mínimo de T.

9. Demuestra que un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio eulideano es linealmente independiente. Es decir, si V es un espacio euclideano y $C \subset V$ es un subconjunto que satisface (1) $v \in C \implies v \neq 0$, y (2) $v, v' \in C$, $v \neq v' \implies (v, v') = 0$, entonces C es un conjunto linealmente independiente. (Nota: puedes suponer que V es de dimensión finita y C es un conjunto finito, pero no es necesario).

10. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$ (la desigualdad de Parseval).

11. Demuestra: si T es un operador lineal normal en un espacio vectorial hermitiano, entonces T y T^* tienen los mismos vectores propios, y los correspondientes valores propios son conjugados.

12. Analisar la familia de secciones cónica $4x^2 + y^2 + 2axy + 10y - 19 = 0$, donde $a \in \mathbb{R}$ (focos, directriz - en caso de parábola, asintotas, vértices). Dibujar 3 casos: $a = 1, 2, 3$.

13. Una matriz cuadrada A con entradas complejas tiene como el polinomio caracteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^6(\lambda - 2)^4(\lambda - 3)^5$ y polinomio mínimo $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$. Encuentra todas las formas de Jordan posibles de A.

14. Un operador lineal en $\mathbb{C}^5$ está representado, con respecto a una base, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que el operador es diagonalizable. (Nota: para demostrar esto no es necesario diagonalizar a A).

15. Este último ejercicio es opcional, pero vale mucho la pena hacerlo, ya que es *muy* bonito y da una ilustración del poder de los conceptos aprendidos en este curso.

(a) Consideramos una matriz $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ cuyas filas son n vectores $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^n$ que forman un conjunto ortogonal (con respecto al producto hermitiano canónico). Demuestra: $|\det(B)| = \Pi_i \|w_i\|$.

Sugerencia: $|\det(B)|^2 = \det(BB^*)$ y BB^* es una matriz cuya entrada ij es (w_i, w_j), así que cuando $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es ortogonal la matriz BB^* es diagonal.

Nota: Encuentra la interpretación geométrica de este inciso.

(b) Demuestra la desigualdad de Hadamard: si A es una matriz $n \times n$ cuyas filas son n vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$, entonces $|\det(A)| \leq \Pi_i \|v_i\|$, con igualdad ssi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal.

Sugerencia: define w_k como la proyección ortogonal de v_k sobre el complemento ortogonal del espacio generado por $v_1, \ldots, v_{k-1}$ (esto es esencialmente el proceso de Gram-Schmidt, excepto que los w_k no están normalizados y no estamos suponiendo que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente). Demuestra que $\|w_k\| \leq \|v_k\|$ con igualdad ssi v_k es ortogonal a $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Sea B la matriz con filas $w_1, \ldots, w_n$. La fila k de A de obtiene de la fila k de B al sumarla una combinación lineal de las primeras $k - 1$ filas, así que $\det(A) = \det(B)$. Ahora aplica a B el inciso anterior.

Nota: esta desigualdad es una generalización de un resultado geométrico elemental: entre todos los paralelogramos en el plano con las mismas longitudes de aristas, el rectángulo tiene el área mayor.

(c) Dados n puntos sobre una circunferencia de radio 1 en el plano, consideramos el producto p_n de todas las distancias entre pares distintos de estos puntos (un total de $n(n-1)/2$ distancias). Demuestra: $p_n \leq n^{n/2}$ con igualdad ssi los puntos forman los n vértices de un polígono regular.

Sugerencia: denota los puntos por n números complejos unitarios $1, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (sin pérdida de generalidad) y forma la determinante de Vandermonde asociada. Para un póligono regular los puntos son $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, donde $\omega = e^{i2\pi/n}$ (los n raíces de la ecuación $z^n = 1$).

Nota: el último inciso está relacionado con el concepto del *diámetro transfinito*, definido por M. Fekete para cualquer subconjunto acotado $K \subset \mathbb{R}^2$ como $D_\infty(K) = \lim_{n\to\infty} D_n$, donde D_n es el supremo (máximo, si K es cerrado) promedio geométrico de las distancias entre pares de puntos en subconjuntos de K con n elementos; es decir, $D_n = (P_n)^{2/n(n-1)}$, donde $P_n = \sup\{\Pi_{i<j}|z_i - z_j| \,|\, z_1, \ldots, z_n \in K\}$. Así que hemos demostrado en este problema: el diámetro tranfinito de un disco de radio R es R.