Examen final - soluciones

PARTE A "Cierto" o "Falso"

NOTA: los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica.

1. Un operador lineal en $\mathbb{C}^3$ con polinomio característico $x(x^2+1)$ es diagonalizable.
$\triangleright$ Cierto, ya que tiene 3 valores propios distintos, $0, i, -i$.

NOTA: el punto aquí es que el operador tiene 3 valores *distintos*, así que 3 vectores propios asociados forman una base de vectores propios. Cuando una raíz tiene multiplicidad (algebráica) en el polinomio característico la situación es mas delicada y puede suceder que la dimensión del espacio propio asociado (la multiplicidad *geométrica*) es menor que la multimplicidad algebráica de la raíz (ejemplo?); en este caso el operador no va a ser diagonalizable ("no tiene suficientes vectores propios").

2. Todo operador normal en $\mathbb{C}^3$ es hermitiano.
$\triangleright$ Falso. El operador con matriz diagonal (en la base canónica) con elementos en el diagonal $i, 0, 0$ es normal pero no hermitiano (tiene valor propio no real).

NOTA: el converso es cierto.

3. El operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)/\sqrt{2}$ es una isometría.
$\triangleright$ Cierto. La imagen de la base canónica es $\{(1, 1)/\sqrt{2}, (1, -1)/\sqrt{2}\}$, lo cual es una base ortonormal.

NOTA: tambien se puede escribir la matriz de esta tranformación con respecto a una base ortonormal, digamos la canónica, y verificar que es una matriz *ortogonal*: $AA^t = I$. Acaba siendo la misma cuenta.

4. Existe un producto interno único en $\mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ es una base ortonormal.
$\triangleright$ Falso. La matriz formada por estos 3 vectores como filas tiene det $= 0$, así que estos 3 vectores son linealmente dependientes (el segundo vector es el promedio de los otros dos).

NOTA: si este conjunto fuera linealmente independiente entonces el inciso es cierto.

5. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ son semejantes.
$\triangleright$ Cierto. Ambos son diagonalizables con los mismos valores propios $(1, 2, 3)$. La conjugación se efectua por la matriz que manda la base de vectores propios de una matriz a la otra.

NOTA: si los elementos en el diagonal de ambos matrices fueran digamos $1, 2, 2$ entonces ya no podemos concluir tan facilmente que son semejantes y la rfespuesta depende del resto de los elementos de las matrices. Esto se debe otra vez al hecho que cuando hay multiplicidad en los valores propios de un operador lineal las cosas se complican, o sea el operador puede ser no diagonalizable.

6. Existe un operador normal en $\mathbb{C}^2$, cuya matriz, con respecto a una cierta base en $\mathbb{C}^2$, es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$\triangleright$ Falso. Un operador normal es diagonalizable, pero esta matriz no es diagonalizable (está en su forma de Jordan).

NOTA: se puede ver facilmente que esta matriz no es diagonalizable sin usar el teorema de Jordan. El polinomio característico es $(\lambda - 1)^2$ así que el único valor propio es $\lambda = 1$. Luego se verifica directamente que el espacio de vectores propios asociados es de dimensión 1 (generado por $(1, 0)$) así que no existe una base de vectores propios.

7. El conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisface $12x^2 + 13xy + 14y^2 = x + 15$ es una hipérbola.
$\triangleright$ Falso. La determinante de la parte cuadrática es $12 \cdot 14 - (13/2)^2 > 0$.

NOTA: el hecho que dicha determinante es positiva indica que el conjunto puede ser una elipse, pero no es suficiente. Hay que trabajar mas, haciendo cambio de coordenadas (rotación y translación) para llevar la ecuación a la forma "normal" $Ax^2 + By^2 = C$, con A, B positivos. El valor de C determina si el conjunto es una elipse "verdadera" o algun caso degenerado. No he hecho esta cuenta.

8. Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

▷ Cierto. $B = PAP^{-1} \implies \lambda I - B = P(\lambda I - A)P^{-1} \implies \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A) \implies$ tienen el mismo polinomio característico $\implies$ mismos valores propios (raíces del polinomio característico).

NOTA: aquí va otro argumento (mas directo). Si λ es un valor propio de $A \implies$ existe un $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v \implies B(Pv) = PAP^{-1}Pv = PAv = P\lambda v = \lambda Pv \implies Pv \neq 0$ es un vector propio de B con valor propio λ. De la misma manera, usando $A = P^{-1}BP$, demostramos que los valores propios de B son valores propios de A.

9. Existe un operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que satisface $T(1,2) = (3i, 4i)$, $T^*(5,6) = (7i, 8i)$.
(Sugerencia: considera $(T^*(5,6),(1,2))$.)
▷ Falso. Si $T(1,2) = (3i,4i) \implies (T^*(5,6),(1,2)) = ((5,6),T(1,2)) = ((5,6),(3i,4i)) = -15i - 24i = -39i$, pero por otro lado $T^*(5,6) = (7i,8i) \implies (T^*(5,6),(1,2)) = ((7i,8i),(1,2)) = 7i + 16i = 23i$.

10. Si el rango de un operador T en $\mathbb{R}^7$ es 3, entonces la nulidad de T^* es 4.
▷ Cierto. En general, para un operador lineal T, el kernel de T^* es el complemento ortogonal de la imagen de T.

11. La proyección ortogonal sobre un subespacio de un esapcio euclideano es un operador autoadjunto.
▷ Cierto. Sea $p : V \to V$ la proyección ortogonal sobre un subespacio $W \subset V$. Si $v, v' \in V$ se puede escribir $v = v_1 + v_2, v' = v_1' + v_2'$, donde $v_1, v_1' \in W$, $v_2, v_2' \in W^\perp$, $p(v) = v_1$, $p(v') = v_1'$, así que $(pv, v') = (v_1, v_1' + v_2') = (v_1 + v_2, v_1') = (v, pv')$.

NOTA: otra manera de ver este inciso es escoger representar a p con respecto a una base ortonormal adaptada a la situación y ver que la matriz es simétrica. Una tal base es una base cuyos primeros $k = \dim(W)$ elementos es una base de W, así que el restos de los elementos es una base de $W^\perp$, y la matriz de p en esta base es diagonal (con k 1's seguidos por $n-k$ 0's), así que es una matriz simétrica.

12. Un conjunto ortogonal de 7 vectores no nulos en $\mathbb{R}^7$ es una base.
▷ Cierto. Un conjunto ortogonal $\{v_1, v_2, \dots\}$ de vectores no nulos es linealmente independiente: $\sum_i c_i v_i = 0 \implies 0 = (\sum_i c_i v_i, v_j) = c_j \|v_j\|^2 \implies c_j = 0$, para todo j, ya que $v_j \neq 0 \implies \|v_j\|^2 \neq 0$.

13. La suma directa de dos operadores invertibles es invertible.
▷ Cierto. La inversa es la suma directa de las inversas.

14. El producto de dos permutaciones impares es una permutación impar.
▷ Falso. El cuadrado de una transposición es la identidad.

15. Los valores propios de un operador autoadjunto en $\mathbb{C}^n$ son reales.
▷ Cierto. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de un operador T con vector propio $v \neq 0$; entonces $(Tv, v) = (\lambda v, v) = \lambda \|v\|^2$. Por otro lado, $T = T^* \implies (Tv, v) = (v, Tv) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda}\|v\|^2 \implies \bar{\lambda}\|v\|^2 = \lambda\|v\|^2 \implies \lambda = \bar{\lambda}$, ya que $v \neq 0 \implies \|v\|^2 \neq 0$.

PARTE B *(40 puntos)*

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal dado por $T(x,y,z) = (y - z, x + z, y - x)$.

1. Demuestra que T es invertible y encuentra su inversa.
▷ Encontrando una inversa demuestra de una vez que es invertible: sea $x' = y - z, y' = x + z, z' = y - x$; entonces $y' - z' = 2x + (z - y) = 2x - x' \implies x = (x' + y' - z')/2$, $x' + z' = 2y - (x + z) = 2y - y' \implies y = (x' + y' + z')/2$, $y' - x' = 2z + x - y = 2z - z' \implies z = (-x' + y' + z')/2$.

NOTA: es tambien posible escribir la matriz de esta trasformación y luego invertir esta matriz mediante la fórmula $A^{-1} = adj(A)/\det(A)$. Es un poco mas largo pero tambien funciona.

2. Demuestra que T es autoadjunto.
▷ La matriz de T, en la base canónica, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta es una matriz simétrica, así que T es autoadjunta.

NOTA: estamos usando el hecho que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal (con respecto al producto punto canónico). Esto es necesario, ya que de otro modo, para una base no ortonormal, no tenemos necesariamente que la matriz de T^* es la traspuesta de la matriz de T, así que no podemos usar el criterio "matriz simétrica" para concluir que T es un operador autoadjunto.

3. Encuentra el polinomio característico de T y sus valores propios.

$\triangleright$ $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$ y los valores propios son $1, -2$.

4. Sea A la matriz de T en la base canónica. Encuentra una matriz ortogonal P tal que PAP^{-1} es diagonal.
$\triangleright$ Sea e_1, e_2, e_3 la base canónica. Entonces PAP^{-1} es diagonal ssi $PAP^{-1}e_i = \lambda_i e_i$ ssi $AP^{-1}e_i = \lambda_i P^{-1}e_i$ ssi $v_1 = P^{-1}e_1, v_2 = P^{-1}e_2, v_3 = P^{-1}e_3$ forman una base ortonormal de vectores propios de A. Pero estos son las columnas de $P^{-1} = P^t$, es decir las filas de P.

$\underline{\lambda = -2}$: las ecuaciones para resolver son

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies y = -z, x = z \implies v_1 = (1, -1, 1)/\sqrt{3}.$$

$\underline{\lambda = 1}$: Por la teoría general, sabemos que el espacio propio de $\lambda = 1$ es el complemento ortogonal de $\langle v_1 \rangle$, lo cual está dado por la ecuación $x - y + z = 0$. Una solución es $v_2 = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$. La otra solución tiene que ser ortogonal a v_2 también, es decir $y + z = 0$. Resolviendo ambos ecuaciones nos da $v_3 = (2, 1, -1)/\sqrt{6}$. Tenemos entonces

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

NOTA: en este problema podemos ver que vale la pena hacer algunas observaciones "conceptuales" que ahorran trabajo (e impresionan al maestro...) antes de lanzarse a hacer las cuentas. Como $\lambda = 1$ es un valor con multiplicidad 2 sabemos que su espacio propio tiene dimesión 2 (aquí usamos que el operador es auto-adjunto así que diagonalizable y multiplicidad geométrica=multiplicidad algebráica). Así que si encontramos un vector propio (cualquera) para $\lambda = -2$ ya podemos olvidar del operador T: normalizamos este vector propio, y lo completamos a *cualquer* base ortonormal. La matriz P cuyas filas son los elementos de esta base es la matriz requerida. Si queremos verificar directamente que la P que obtenemos satisface que PAP^{-1} es diagonal, es útil notar que para matriz ortogonal $P^{-1} = P^t$ (la transpuesta), algo que tambien ahorra trabajo.

5. Encuentra el polinomio mínimo de T.
$\triangleright$ Como T es diagonalizable, el polinomio mínimo es $m(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)$.

NOTA: en general, si un operador es diagonalizable (como en nuestro caso), el polinimio mínimo es el producto de los factores lineales *distintos* del polinomio característico. Esto es facil de demostrar con la matriz diagonal D que representa a T. Las entradas en el diagonal de D son los valores propios de T, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y para cualquer polinomio $f(\lambda)$, la matriz $f(D)$ es una matriz diagonal con entradas en el diagonal $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$. Así que $f(D) = 0$ ssi los valores propios de T son raices de f. El polinomio de grado mínimo que satiface esta condición es el producto de los factores lineales distintos en el polinomio característico de T.