
Tarea núm. 5 – soluciones

1. Representa los siguientes elementos de $\mathbb{C}$ en la forma $x+iy$: $1/i$, $\frac{1+i}{1-i}$, i^{2003}, $e^{i\pi}$, $e^{i\pi/4}/i$, $(1+i)^{2003}$.

   $\triangleright$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i} &= \frac{1}{i}\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i. \\
\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i. \\
i^{2003} &= (i^2)^{1001} i = (-1)^{1001} i = -i. \\
e^{i\pi} &= \cos(\pi) + i\mathrm{sen}(\pi) = -1 + i0 = -1. \\
e^{i\pi/4}/i &= -i(\cos(\pi/4) + i\mathrm{sen}(\pi/4)) = -i(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2. \\
(1+i)^{2003} &= [\sqrt{2}e^{i\pi/4})]^{2003} = (\sqrt{2})^{2003}[e^{i\pi/4}]^{2003} = \sqrt{2}\,2^{1001}e^{i2003\pi/4} = \\
&= \sqrt{2}\,2^{1001}e^{i2\pi(250+3/8)} = \sqrt{2}\,2^{1001}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\,2^{1001}(-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \\
&= -2^{1001} + i2^{1001}
\end{aligned}
$$

   □

2. Demuestra que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = (z+\bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z-\bar{z})/2i$ y que $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \bar{z}$.

   $\triangleright$ $z = x+iy \implies (z+\bar{z})/2 = [(x+iy)+(x-iy)]/2 = 2x/2 = x = \mathrm{Re}(z)$, $(z-\bar{z})/2i = [(x+iy)-(x-iy)]/2i = 2iy/2i = y = \mathrm{Im}(z)$. Luego, $z \in \mathbb{R}$ ssi $0 = y = \mathrm{Im}(z) = (z-\bar{z})/2i$ ssi $z = \bar{z}$.

   □

3. Demuestra que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

   $\triangleright$ Si $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$, tenemos al lado izquierdo:

   $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

   Y al lado derecho: $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$. □

4. Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \implies p(\bar{z}) = 0$ ("las raizes de polinomios con coeficientes reales vienen en pares conjugados").

   $\triangleright$ Usamos los siguiente:

   (1) $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \implies \overline{z_1 + \ldots + z_n} = \bar{z}_1 + \ldots + \bar{z}_n$;

   (2) $z \in \mathbb{C} \implies \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

   Ambos se puede demostrar facilmente por inducción. Tenemos entonces:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & p(z) & = & 0 & \\
\implies & \overline{p(z)} & = & \bar{0} = 0 & \\
\implies & 0 & = & \overline{a_0} + \overline{a_1z} + \overline{a_2z^2} + \ldots + \overline{a_nz^n} & (\text{ usando (1) }) \\
 & & = & \bar{a}_0 + \bar{a}_1\,\bar{z} + \bar{a}_2\,\bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n\,\bar{z}^n & (\text{ usando (2) + problema anterior }) \\
 & & = & a_0 + a_1\,\bar{z} + a_2\,\bar{z}^2 + \ldots + a_n\,\bar{z}^n & (\text{ ya que los } a_i \in \mathbb{R}\text{ }) \\
 & & = & p(\bar{z}) &
\end{array}
$$

   □

5. Demuestra que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

   $\triangleright$ Las operaciones de suma y producto en $\mathbb{C}$ estan definidos de tal modo que cuando las restringimos a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se obtienen las operaciones usuales de campo en $\mathbb{R}$, por lo que cumple: $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies x_1 - x_2, x_1x_2 \in \mathbb{R}$, y $x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \implies x^{-1} \in \mathbb{R}$. □

6. Demuestra que $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ no es un subanillo de $\mathbb{C}$.

   $\triangleright$ $1 \notin i\mathbb{R}$. □

7. Demuestra que $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$ pero no es un subcampo. Encuentra el conjunto de todos los elementos con inversa multiplicativa en $\mathbb{Z}[i]$.

   $\triangleright$ (1) $0 = 0 + i0$, $1 = 1 + i0 \in \mathbb{Z}[i]$.

   (2) $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i] \implies z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2,\ a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z} \implies z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}[i]$, ya que $(a_1 - a_2)$, $(b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}$. Luego, $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) \in \mathbb{Z}[i]$, ya que $(a_1a_2 - b_1b_2)$, $(a_1b_2 + b_1a_2) \in \mathbb{Z}$.

   Así que es un subanillo. Pero no es un subcampo, porque los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}[i]$ son $1, -1, i, -i$. Demostración: si $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ es invertible en $\mathbb{Z}[i]$ entonces existe un $w = c + id \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $zw = 1$. Pero entonces $1 = 1\bar{1} = zw\,\overline{zw} = (z\bar{z})\,(w\bar{w}) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \implies a^2 + b^2 = 1 \implies a = \pm 1, b = 0$ ó $a = 0, b = \pm 1 \implies z = \pm 1$ ó $\pm i$. $\square$

8. Demuestra que $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$.

   $\triangleright$ Las identidades trigonométricas de adición de ángulos son:

   (1) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \mathrm{sen}(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_2)$,

   (2) $\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_2)$.

   Así que $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) = [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \mathrm{sen}(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_2)] + i[\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\mathrm{sen}(\theta_2)] = [\cos(\theta_1) + i\mathrm{sen}(\theta_1)][\cos(\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_2)] = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$. $\square$

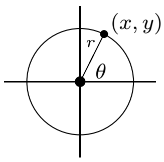
9. Demuestra que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

   $\triangleright$ $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)} = \cos(\theta) - i\mathrm{sen}(\theta) = \cos(-\theta) + i\mathrm{sen}(-\theta) = e^{-i\theta}$. $\square$

10. Demuestra que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists r, \theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, tal que $z = re^{i\theta}$. Admeás, si $z \neq 0$, el r es único y la θ única salvo la adición de un múltiplo de 2π; o sea, si $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$, $r_1, r_2 \geq 0 \implies r_1 = r_2$ y $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi$. Si pedimos $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces θ es única.

    Terminología: Para un $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, se llama *la forma polar* de z.

    $\triangleright$ Si $z = 0$, $r = 0$ con cualquer θ cumple. Si $z = x + iy \neq 0$, $z = re^{i\theta} \implies z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La θ se define según el siguiente dibujo:



    Del dibujo, y la definición de $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$, $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\mathrm{sen}(\theta)$. Además, del dibujo, la θ se determina únicamente, salvo la adición de un múltiplo entero de 2π radianes. $\square$

    Nota: Las palabras "del dibujo" en la "demostración" que dimos no parecen muy rigurosas; es cierto, y esto es debido a que la definición de las funciones cos y sen que usamos (y que no las dimos explicitamente) no son rigurosas, mediante fórmulas explicitas, sino geométricas, esencialmente mediante el dibujo que damos aquí. Mas tarde, en un curso de cálculo (análisis) se da la definición rigurosa de estas funciones, mediante fórmulas como $\cos(\theta) = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \ldots$ (una serie de potencias), entonces se puede completar esta demostración.

11. Encuentra la forma polar de los siguientes números complejos: $1 + i$, $-\sqrt{2}$, $1/e^{i\theta}$.

    $\triangleright$ Haciendo dibujos como el de arriba: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $-\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi}$, $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$. $\square$

12. Expresa a $\cos(4\theta)$ y $\mathrm{sen}(4\theta)$ en términos de $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$.

    $\triangleright$ Sea $x = \cos\theta$, $y = \mathrm{sen}\theta$ y $z = x + iy = e^{i\theta}$. Entonces $z^4 = e^{i4\theta} \implies \cos(4\theta) + i\mathrm{sen}(4\theta) = (x + iy)^4 = x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i(4x^3y - 4xy^3)$

    $$\implies \cos(4\theta) + i\mathrm{sen}(4\theta) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i(4x^3y - 4xy^3).$$

    Tomando las partes real e imaginaria de la última indentidad obtenemos

    $$\begin{cases} \cos(4\theta) &= (\cos\theta)^4 - 6(\cos\theta)^2(\mathrm{sen}\theta)^2 + (\mathrm{sen}\theta)^4, \\ \mathrm{sen}(4\theta) &= 4(\cos\theta)^3\mathrm{sen}\theta - 4\cos\theta(\mathrm{sen}\theta)^3. \end{cases}$$

    $\square$