Algebra Lineal 1, agsto-dic, 2003.

Tarea núm. 5

Para el 12 sept. 2003

Definiciones:

- Un *sub-anillo* de un anillo A es un subconjunto $B \subset A$ tal que (1) $0, 1 \in B$ (2) $\forall x, y \in B$, $x - y, xy \in B$.
- Un *sub-campo* de un campo F es un subanillo $E \subset F$ que además satisface: $\forall x \in E$, $x \neq 0 \implies x^{-1} \in E$. En este caso decimos tambien que F es una *extensión* del campo E.
- Denotamos por $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de números complejos, con las operaciones usuales de adición y multiplicación: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Además, si para un número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tenemos que $x = 0$ ó $y = 0$ ó $y = 1$, lo omitimos. Por ejemplo: $-2 := -2 + i0$, $2 + i = 2 + i1$, $i = 1 + i1$, $0 = 0 + i0$. Así tenemos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
- Para un $z = x + iy \in \mathbb{C}$, x se llama *la parte real* de z, y es *la parte imaginaria* y $x - iy$ es el *conjugado* de z. Notación: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, $\bar{z} = x - iy$. Por ejemplo: $\mathrm{Re}(1 + i) = \mathrm{Im}(1 + i) = 1$, $\mathrm{Re}(i) = 0$, $\mathrm{Im}(-i) = -1$, $\overline{1 + i} = 1 - i$, $\bar{i} = -i$.
- Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ denotamos por $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)$. Por ejemplo: $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\mathrm{sen}(\pi/2) = 0 + i1 = i$.

Demostrado en clase (se puede usar en la tarea):

- $\mathbb{C}$ es un campo: la inversa de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ está dada por $\bar{z}/z\bar{z} = [x/(x^2 + y^2)] - i[y/(x^2 + y^2)])$.

Problemas:

1. Representa los siguientes elementos de $\mathbb{C}$ en la forma $x + iy$:
$$1/i, \quad \frac{1+i}{1-i} \quad, i^{2003}, \quad e^{i\pi}, \quad e^{i\pi/4}/i, \quad (1+i)^{2003}.$$
Sugerencia: (para el último) puede ayudar convertir a forma polar; para esto hay que resolver primero los demas problemas de esta tarea.
2. Demuestra que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$ y que $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \bar{z}$.
3. Demuestra que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
4. Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \implies p(\bar{z}) = 0$ ("las raizes de polinomios con coeficientes reales vienen en pares conjugados").
5. Demuestra que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.
6. Demuestra que $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ no es un subanillo de $\mathbb{C}$.
7. Demuestra que $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$ pero no es un subcampo. Encuentra el conjunto de todos los elementos con inversa multiplicativa en $\mathbb{Z}[i]$.
8. Demuestra que $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$.
Sugerencia: se puede usar (sin demostración), las fórmulas trigonométrcias de sumas de ángulos para cos y sen.
9. Demuestra que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
10. Demuestra que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists r, \theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, tal que $z = re^{i\theta}$. Admeás, si $z \neq 0$, el r es único y la θ única salvo la adición de un múltiplo de 2π; o sea, si $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$, $r_1, r_2 \geq 0 \implies r_1 = r_2$ y $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi$. Si pedimos $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces θ es única.
Terminología: Para un $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, se llama *la forma polar* de z.
11. Encuentra la forma polar de los siguientes números complejos: $1 + i$, $-\sqrt{2}$, $1/e^{i\theta}$.
12. Expresa a $\cos(4\theta)$ y $\mathrm{sen}(4\theta)$ en términos de $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$.
Sugerencia: se puede hacer este ejercicio sin números complejos, pero es mas facil con, tomando las partes real e imaginaria de los dos lados de la identidad $(e^{i\theta})^4 = e^{4i\theta}$.