Tarea num. 3 – soluciones

1. Sean A y B dos conjuntos finitos, $\#A = n$, $\#B = m$. Demuestra que $\#(A \times B) = mn$.

   Demostración: Sea $C_N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq N\} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Así que hay que demostrar que $A \times B \sim C_{nm}$ (ver la definción de "número de elementos en un conjunto finito", al principio de la tarea 2).

   Esto lo demostramos en dos pasos: (1) $A \times B \sim C_n \times C_m$, (2) $C_n \times C_m \sim C_{nm}$. Estos dos pasos dan el resultado requerido (ver Tarea 2, "demostrado en clase", primer inciso, sub-inciso (3)).

   (1) Demostración de $A \times B \sim C_n \times C_m$: como $\#A = n$, $\#B = m$, tenemos que $A \sim C_n$, $B \sim C_m$, o sea, existen biyecciones $f : A \to C_n$ y $g : B \to C_m$, con inversas $f^{-1} : C_n \to A$ y $g^{-1} : B \to C_m$. Definimos a $\alpha : A \times B \to C_n \times C_m$ por $\alpha((a, b)) := (f(a), g(b))$, para todo $(a, b) \in A \times B$. Para demostrar que α es una biyección le construimos una inversa (ver problema 1 de la tarea 2). Sea $\beta : C_n \times C_m \to A \times B$ definida por $\beta((i, j)) := (f^{-1}(i), g^{-1}(j))$. Vemos que $\beta = \alpha^{-1}$: para todo $(a, b) \in A \times B$ tenemos que $\beta \circ \alpha((a, b)) = \beta((f(a), g(b)) = ((f^{-1}(f(a)), g^{-1}(g(b))) = (a, b)$, y para todo $(i, j) \in C_n \times C_m$ tenemos que $\alpha \circ \beta((i, j)) = (\alpha((f^{-1}(i), g^{-1}(j)) = ((f(f^{-1}(i)), g(g^{-1}(j))) = (i, j) \implies \alpha \circ \beta = 1_{C_n \times C_m}$, $\beta \circ \alpha = 1_{A \times B} \implies \beta = \alpha^{-1}$.

   (2) Demostración de $C_n \times C_m \sim C_{nm}$: definimos $f : C_n \times C_m \to C_{nm}$ por $f((i, j)) = i + n(j - 1)$, para todo $(i, j) \in C_n \times C_m$.

   Primero verificamos que f está bien definida; o sea, que $i + n(j - 1) \in C_{nm}$. Como $j \in C_m \implies 1 \leq j \leq m \implies 0 \leq (j - 1) \leq m - 1 \implies 0 \leq n(j - 1) \leq n(m - 1)$, y como $i \in C_n \implies 1 \leq i \leq n \implies 1 \leq i + n(j - 1) \leq n + n(m - 1) = nm \implies i + n(j - 1) \in C_{nm}$.

   Demostramos que f es inyectiva: si $f((i, j)) = f((i', j')) \implies i + n(j - 1) = i' + n(j' - 1) \implies n(j - j') = i - i'$. Como $1 \leq i, i' \leq n \implies |i - i'| < n \implies n(j - j')$ es un elemento del conjunto $\{-n + 1, -n + 2, \dots, n - 2, n - 1\}$. Por otro lado, $n(j - j')$ es un múltipo de n, o sea un elemento del conjunto de números $\{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$. El único de estos números que satisface $|i - i'| < n$ es 0. Así que $i' - i = n(j - j') = 0 \implies j - j' = 0$ (ya que $n \neq 0$). Tenemos entonces que $i = i'$ y $j = j'$ así que f es inyectiva.

   Demostramos que f es suprayectiva: sea $k \in C_{nm}$ y escribimos $k - 1 = r + ns$, $r, s \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < n$ ("división de $k - 1$ entre n con residuo r"). Entonces para $i := r + 1$, $j := s + 1$, se tiene que $k = i + n(j - 1)$, y ademas $1 \leq i \leq n \implies i \in C_n$; luego, $s \geq 0 \implies j = s + 1 \geq 1$ y $i + n(j - 1) = k \leq nm \implies n(j - 1) \leq nm - i \leq nm - 1 \implies j - 1 \leq m - 1/n \implies j - 1 \leq m - 1 \implies j \leq m \implies j \in C_m \implies (i, j) \in C_n \times C_m$. $\square$

2. Dados dos conjuntos A, B, se define $B^A := \{f \mid f : A \to B\}$ (el conjunto de todas las funciones entre A y B).

   (a) Dado un conjunto A, encuentra una biyección entre $\{0, 1\}^A$ y $P(A)$ (el conjunto potencia de A).

   Demostración: para cada subconjunto $B \subset A$, definimos $I_B : A \to \{0, 1\}$ por $I_B(x) = 1$ si $x \in B$ y $I_B(x) = 0$ si $x \in A \setminus B$. Luego definimos $F : P(A) \to \{0, 1\}^A$ por $F(B) = I_B$. Para demostrar que F es biyectiva construyimos una inversa $G : \{0, 1\}^A \to P(A)$, definida por $G(f) := \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Si $B \subset A \implies F(G(B)) = F(I_B) = \{x \in A \mid I_B(x) = 1\} = B$ (por definición de I_B) $\implies G \circ F = 1_{P(A)}$. Si $f : A \to \{0, 1\} \implies F \circ G(f) = F(B) = I_B$, donde $B = G(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Para cada $x \in A$, si $x \in B \implies f(x) = 1 = I_B(x)$, y si $x \notin B \implies f(x) = 0 = I_B(x) \implies f = I_B \implies F \circ G = 1_{\{0,1\}^A}$. $\square$

(b) Si A y B son conjuntos finitos, $\#A = n$, $\#B = m$, demuestra que $\#B^A = m^n$.

Demostración: Por inducción sobre $\#A = n$.

$n = 1$: en este caso $A = \{a\}$ y definimos una biyección $\alpha : B^A \to B$ por $\alpha(f) = f(a)$. Sea $\beta : B \to B^A$, dada por $\beta(b) = f_b$, donde $f_b(a) = b$. Tenemos entonces que para todo $b \in B$, $\alpha(\beta(b)) = \alpha(f_b) = f_b(a) = b \implies \alpha \circ \beta = 1_B$, y que para todo $f \in B^A$, $\beta(\alpha(f)) = \beta(f(a)) = f_b$, donde $b = f(a) \implies f_b = f \implies \beta \circ \alpha = 1_{B^A} \implies \beta = \alpha^{-1} \implies \alpha$ es biyectiva. Esto implica que $B^A \sim B$, así que $\#B^A = \#B = n$. (Esto es consecuencia inmediata de la transitividad de la relacion $\sim$. Ver tarea 2, primer "resultado demostrado en clase", inciso 3).

$n \implies n+1$: Suponemos entonces que $\#A = n+1$, así que tenemos una biyección $f : A \to C_{n+1}$, donde $C_{n+1} = \{1, \ldots, n+1\}$. Sea $a = f^{-1}(n+1) \in A$ y definimos $A' = A \setminus \{a\} = \{x \in A \mid x \neq a\}$. Nuestro plan de demostración es lo siguiente: (1) demostramos que $\#A' = n$. (2) Demostramos que $B^A \sim B^{A'} \times B$. (3) Demostramos que $\#B^A = m^{n+1}$.

(1) Demostramos que $\#A' = n$: definimos $f' : A' \to C_n$, por $f'(x) = f(x)$, para todo $x \in A'$. f' está bien definida, ya que si $x \in A' \implies x \neq a \implies f(x) \neq n+1 \implies f(x) \in C_n$. Luego, f' es claramente inyectiva (por la inyectividad de f), y es suprayectiva ya que para todo $k \in C_n$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = k$, pero $x \neq a$, ya que $f(a) = n+1$ y f es inyectiva, así que $x \in A'$. Así que f' es una biyección y $\#A' = n$.

(2) Demostramos que $B^A \sim B^{A'} \times B$: definimos una $F : B^A \to B^{A'} \times B$ por $F(f) = (f', f(a))$, donde $f' : A' \to B$ está dada por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in A'$. Sea $G : B^{A'} \times B \to B^A$ dada por $G(f', b) = f_b$, donde $f_b : A \to B$ está definida por $f_b(x) = f'(x)$ para $x \in A'$, y $f_b(a) = b$. Entonces $(F \circ G)((f', b)) = F(f_b) = (f', b)$ y $(G \circ F)(f) = G((f', f(a)) = f_b$, donde $b = f(a)$, así que $f_b = f$, $\implies G = F^{-1}$.

(3) Demostramos que $\#B^A = m^{n+1}$: por inciso (1) y la suposición de la inducción, $\#(B^{A'}) = m^n$, luego por problema 1 de esta tarea, $\#(B^{A'} \times B) = \#(B^{A'}) \cdot \#B = m^n m = m^{n+1}$, y finalmente por el inciso anterior $\#(B^A) = \#(B^{A'} \times B) = m^{n+1}$. $\square$

(c) Concluye de los dos incisos anteriores que si $\#A = n$ entonces $\#P(A) = 2^n$.

Demostración: $\#P(A) = \#(\{0,1\}^A = \#(\{0,1\})^{\#}A = 2^{\#}A$, ya que $\{0,1\} \sim C_2$, por la biyección $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$. $\square$

(d) (Opcional) Encuentra una inyección entre B^A y $P(A \times B)$.

Demostración: para cada función $f : A \to B$ definimos su "gráfica" por $G(f) := \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$. Luego $G : B^A \to P(A \times B)$ es una inyección, ya que $G(f_1) = G(f_2), a \in A \implies (a, f_1(a)) \in G(f_2) \implies f_1(a) = f_2(a)$. $\square$

3. (Opcional) Sea A un conjunto finito con n elementos y $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Demuestra que $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$. ($P_k(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos; ver el problema 3 de la tarea 1).

Demostración: Para $k = 0$, $P_k(A) = \{\emptyset\} \implies \#P_k(A) = 1 = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1}$. (Nota: definimos $\binom{n}{k} := 0$, si $k < 0$ ó $n < k$.)

Para $n = 0$ el único caso es $k = 0$, lo cual acabamos de demostrar.

Para $n \geq 1$, demostramos por inducción sobre n que $\#P_k(A) = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $k \leq n$.

$\underline{n = 1}$: si $\#A = 1 \implies P_1(A) = \{A\} \implies \#P_1(A) = 1 = \binom{0}{1} + \binom{0}{0}$.

$\underline{n - 1 \implies n}$: sea A un conjunto con n elementos, $n \geq 2$ y $k \geq 1$. Escogemos un elemento $a \in A$ y definimos $A' = A \setminus \{a\}$, así que $\#A' = n-1$ (ver inciso (1) en la demostración del problema 2b arriba). Ahora partimos el conjunto $P_k(A)$ en los siguientes dos subconjuntos disjuntos: $P' := \{B \subset A \mid \#B = k, a \notin B\}$ y $P'' := \{B \subset A \mid \#B = k, a \in B\}$. Ahora demostraremos que (1) $P' = P_k(A')$, (2) $P'' \sim P_{k-1}(A')$, y (3) $\#P_k(A) = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(1) Esto es inmediato de la definiciones de P' y A'.

(2) Definimos $f : P'' \to P_{k-1}(A')$ por $f(B) = B \setminus \{a\}$, para cada $B \in P''$. f está bien definida ya que $\#B = 1, a \in B \implies \#(B \setminus \{a\}) = (\#B) - 1 = k - 1 \implies B \setminus \{a\} \in P_{k-1}(A')$. Definimos $g : P_{k-1}(A') \to P''$ por $g(B') = B' \cup \{a\}$, para todo $B' \in P_{k-1}(A')$. g está bien definida ya que

$B' \in P_{k-1}(A') \implies B' \subset A, \#B' = k-1, a \notin B \implies \#(B' \cup \{a\}) = (\#B') + 1 = k$ (la última implicación se demuestra de manera muy similar a la del incisio (1) del problema 2b arriba). Ahora $(f \circ g)(B') = f(B' \cup \{a\}) = (B' \cup \{a\}) \setminus \{a\} = B'$ y $(g \circ f)(B) = f(B \setminus \{a\}) = (B \setminus \{a\}) \cup \{a\} = B \implies g = f^{-1} \implies f$ es biyective $\implies P'' \sim P_{k-1}(A')$.

(3) Como $P_k(A) = P' \cup P'', P' \cap P'' = \emptyset \implies \#(P_k(A)) = \#(P') + \#(P'')$ (usando problema 5 de la tarea 2); luego, por los dos inciso anteriores y la suposición de la inducción, $\#(P_k(A)) = \#(P_k(A')) + \#P_{k-1}(A') = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

De lo anterior, y la propiedad conocida $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ de los coeficientes binomiales, concluimos que $\#P_k(A) = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$. □

4. (a) Demuestra que si A es finito y $B \sim A$, entonces B tambien es finito y $\#B = \#A$.

   Demostración: Si A es finito y $B \sim A$ entonces $A \sim C_n$, para algun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, donde $C_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ó $A = \emptyset$. Ahora $B \sim A, A \sim C_n \implies B \sim C_n \implies B$ es finito y $\#B = n = \#A$. □

   (b) Demuestra que dos conjuntos finitos son equivalentes si y solo si $\#B = \#A$.

   Demostración: Si A, B son finitos y equivalntes entonces el inciso anterior implica $\#B = \#A$. Si son finitos y $\#B = \#A$ entonces $A \sim C_n, B \sim C_n$ (o ambos son vacios) $\implies C_n \sim B \implies A \sim B$. □

   (c) Demuestra que si A es un conjunto finito y $B \subset A$ entonces (1) B tambien es finito, (2) $\#B \leq \#A$, (3) $\#B = \#A$ si y solo si $B = A$, (4) $B \sim A$ si y solo si $B = A$.

Demostración: Demostramos los 4 incisos (simultaneamente) por inducción sobre $n = \#A$. Si $n = 0 \implies A = \emptyset \implies B = \emptyset$ y todos los incisos son trivialmente ciertos.

mn $\underline{n-1 \implies n}$: suponemos entonces que $\#A = n$ y sea $B \subset A$. Si $B = A$ entonces todos los incisos son trivialmente ciertos. De otro modo, existe $a \in A \setminus B$. Sea $A' = A \setminus \{a\}$. Entonces $B \subset A'$ y $\#A' = n - 1$ (ver la demostración de inciso (1) del problema 2b arriba). Por inducción, (1) B es finito, (2) $\#B \leq \#A' = n - 1 < n = \#A$, (3) $\#B = \#A \implies \#B = n \implies$ contradicción con $\#B \leq n - 1 \implies B = A$, y (4) $B \sim A \implies \#B = \#A \implies$ por el inciso anterior $A = B$. □

5. (a) Demuestra que si A y B son conjuntos finitos entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ tambien son finitos y que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

   Demostración: como $A \cap B \subset A$ y A es finito, el problema anterior (4b) implica que $A \cap B$ es tambien finito.

   Para demostrar la fórmula $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ estudiamos primero el caso especial de $A \cap B = \emptyset$.

   Sea entonces $\#A = n$, $\#B = m$, con $f : C_n \to A$, $g : C_m \to B$ las correspondientes biyecciones. Definimos $h : C_{n+m} \to A \cup B$ por $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, $h(x) = g(x) + n$ si $x \in B$. h está bien definida ya que $A \cup B$, por lo que x no puede estar en ambos A y B.

   h es inyectiva ya que si $h(x) = h(y)$ entonces si $x, y \in A$, $f(x) = h(x) = h(y) = f(y) \implies x = y$ por la inyectividad de f, si $x, y \in B$, $g(x) = h(x) = h(y) = g(y) \implies x = y$ por la inyectividad de g, y si (digamos) $x \in A$, $y \in B \implies h(y) = g(y) + n > n \geq f(x) = h(x) \implies$ contradiccíon.

   h es suprayectiva ya que si $k \in C_{n+m}$ entonces si $k \leq n \implies k \in C_n \implies$ existe un $x \in C_n$ tal que $k = f(x) = h(x)$, y si $k \geq n + 1 \implies k - n \in C_m \implies$ existe un $x \in C_m$ tal que $g(x) = k - n \implies k = g(k) + n = h(x)$. □

   Para el caso general ($A \cap B$ no necesariamente vacio), notamos que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Así que, por lo demostrado arriba, $\#(A \cup B) = \#A + \#(B \setminus A)$. Luego, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ y $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset \implies \#B = \#(B \setminus A) + \#(A \cap B) \implies \#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) \implies \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$. □