Tarea num. 3

(Para el 29 agosto, 2003)

Definiciones:

- El producto cartesiano de dos conjuntos A y B se define como el conjunto $A \times B$ de todos los *pares ordenados* (a, b), donde $a \in A$, $b \in B$. Un par ordenado se puede definir formalmente como una función $f : \{1, 2\} \to A \cup B$, donde $f(1) \in A$, $f(2) \in B$.
- El producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ (I es un conjunto de indices), es el conjunto $\times_{i \in I} A_i$ de todas las funciones $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, tal que $f(i) \in A_i$, para todo $i \in I$. (Nota: la definición de $A \times B$ corresponde al caso de $I = \{1, 2\}$.)
- Una relación en un conjunto A es un subconjuno $R \subset A \times A$.

Problemas

1. Sean A y B dos conjuntos finitos, $\#A = n$, $\#B = m$. Demuestra que $\#(A \times B) = mn$.

   (Nota: a veces se usa la notación $|A|$ en lugar de $\#A$. En esta notación el resultado tiene la agradable forma $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.)

2. Dados dos conjuntos A, B, se define $B^A := \{f \mid f : A \to B\}$ (el conjunto de todas las funciones entre A y B).

   (a) Dado un conjunto A, encuentra una biyección entre $\{0, 1\}^A$ y $P(A)$ (el conjunto potencia de A).

   Sugerencia: para cada subconjunto $B \subset A$, define $\mathrm{I}_B : A \to \{0, 1\}$ por $\mathrm{I}_B(x) = 1$ si $x \in B$ y $\mathrm{I}_B(x) = 0$ si $x \in A \setminus B$ (la *función indicatriz* de B). Luego define $F : P(A) \to \{0, 1\}^A$ por $F(B) = \mathrm{I}_B$.

   (b) Si A y B son conjuntos finitos, $\#A = n$, $\#B = m$, demuestra que $\#B^A = m^n$.

   (Nota: en otras palabras, $|B^A| = |B|^{|A|}$, lo cual explica la rara notación B^A.)

   (c) Concluye de los dos incisos anteriores que si $\#A = n$ entonces $\#P(A) = 2^n$.

   (d) (Opcional) Encuntra una inyección entre B^A y $P(A \times B)$.

   Sugerencia: para cada función $f : A \to B$ define su "gráfica" como el conjunto $G(f) := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$.

3. (Opcional) Sea A un conjunto finito con n elementos y $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Demuestra que
$$\#P_k(A) = \binom{n}{k}.$$
($P_k(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos; ver el problema 3 de la tarea 1).

   Sugerencia: se pueda usar la propiedad (conocida) de los coeficientes binomiales: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (para $0 < k < n$). Demuestra por inducción sobre n que $\#P_k(A) = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Para esto, escoge un elemento $a \in A$ y define $A' = A \setminus \{a\}$, así que $\#A' = n - 1$. Ahora parte el conjunto $P_k(A)$ en dos subconjuntos disjuntos: $\{B \subset A \mid \#B = k, a \notin B\}$ y $\{B \subset A \mid \#B = k, a \in B\}$. Luego, demuestra que el primero es $P_k(A')$ y el segundo es equivalente a $P_{k-1}(A')$.

4. Problemas 4 y 5 de la tarea 2.