
Soluciones de Tarea num. 2

1. (a) Demuestra que una función es biyectiva si y solo si es invertible; o sea, $f : A \to B$ es biyectiva si y solo si tiene una inversa $g : B \to A$.

   Demostración: Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Definimos a $g : B \to A$ de la manera siguiente: para un $y \in B$, $g(y) = x$, donde $x \in A$ satisface $f(x) = y$ (tal x existe por la suprayectividad de f, y es único por la inyectividad). Para cada $x \in A$, si $y := f(x)$, entonces por la definición de g, $g(y) = x$, así que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x \Rightarrow g \circ f = 1_A$. Además, para cada $y \in B$, $x := g(y)$ satisface $f(x) = y$, así que $(f \circ g)(x) = f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ g = 1_B$.

   Si g es una inversa de f y $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ es inyectiva. Para todo $y \in B$ tenemos que $y = f(g(y)) = f(x)$, donde $x := g(y)$, así que f es suprayectiva. □

   (b) Demuestra que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 1$ es biyectiva, y encuentra su inversa.

   Demostración: Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = x - 1$. Entonces para todo $x \in \mathbb{Z}$ $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$, y para todo $y \in \mathbb{Z}$ $f(g(x)) = f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$, así que g es una inversa de f, así que f es biyectiva (por el inciso anterior). □

   (c) Demuestra que si una función es invertible entonces su inversa es única; o sea, si $f : A \to B$ es una función con inversas $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$, entonces $g_1 = g_2$.

   Demostración: Sean $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$ dos inversas de $f : A \to B$. Sea $y \in B$ y sea $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (tal x existe poruque f es suprayectiva). Entonces $g_1(y) = g_1(f(x)) = x = g_2(f(x)) = g_2(y) \Rightarrow g_1 = g_2$. □

2. (a) Demuestra que una función $f : A \to B$ es inyectiva si y solo si existe una $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ ("inversa por la izquierda").

   Demostración: sea $f : A \to B$ una función inyectiva y fijamos un $x_0 \in A$. Para todo $y \in B$, definimos $g(y)$ dividiendo en dos casos: (1) si $y \in f(A)$ entonces existe un x tal que $y = f(x)$ y se define $g(y) := x$. Notemos que como f es inyectiva, x es el *único* elemento de A tal que $f(x) = y$. (2) Si $y \notin f(A)$ se define $g(y) := x_0$. Ahora para cada $x \in A$, si $y = f(x)$, entonces $y \in f(A)$, así que por la definición de g, $g(y) = x \Rightarrow g(f(x)) = g(y) = x$. Así que g es una inversa por la izquierda de f.

   (b) Da un ejemplo de una función con dos distintas "inversas por la izquierda".

   Respuesta: Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; $f : A \to B$ dada por $f(x) = x$, $x \in A$; $g_1, g_2 : B \to A$ dadas por $g_1(y) = g_2(y) = y$ si $y = 1$ o $y = 2$, $g_1(3) = 1$, $g_2(3) = 2$. Entonces $g_1 \neq g_2$ porque $g_1(3) \neq g_2(3)$. Luego, para todo $x \in A$, $g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = x$, así que g_1, g_2 son dos distintas inversas por la izquierda.

   Otro ejemplo: $A = B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g_1(y) = g_2(y) = y - 1$ si $y > 0$, $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 17$. Es claro que $g_1 \neq g_2$. Luego, para todo $x \in \mathbb{N}$, $y = f(x) > 0$, así que $g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = (x + 1) - 1 = x$.

3. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que existe una función inyectiva $f : A \to B$ si y solo si existe una función suprayectiva $g : B \to A$.

   Demostración: Si $f : A \to B$ es una función inyectiva entonces tiene una inversa por la izquiereda (ver problema 2a); o sea, una $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$. Pero esta última ecuación implica que f es una inversa *por la derecha* de g, lo cual implica que g es suprayectiva (ver problema 2c).

   De manera similar, si $g : B \to A$ es suprayectiva entonces tiene una inversa por la derecha $f : A \to B$, lo cual implica que g es una inversa por la izquierda de f, así que f es inyectiva. $\square$