Algebra Lineal 1 – Tarea num. 2

(Por entregar el viernes, 22 de agsto, 2003)

Definiciones:

- Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$; es *suprayectiva* si $\forall y \in B\ \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$; es *biyectiva* (o es una *biyección*) si es inyectiva y suprayectiva.
- Dos conjuntos A, B son *equivalentes*, $A \sim B$, si existe una biyección $f : A \to B$.
- La *función identidad* de un conjunto A es la función $1_A : A \to A$, definida por $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.
- Una inversa de una función $f : A \to B$ es una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$.
- Un conujnto A es *finito* si es vacio o si existe un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que $A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}$. En este caso se dice que A tiene n elementos, $\#A = n$. Para el conjunto vacío se define $\#\emptyset = 0$. El conjunto es *infinito* si no es finito; es *numerable* si es finito o equivalente a $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales).
- El *conjunto potencia* de un conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Notación: $P(A) := \{B \mid B \subset A\}$.
- La *imagen* de una función $f : A \to B$ es el subconjunto de B (el codominio de f) que consiste en los valores de f. Notación: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Demostrado en clase (se puede usar en la tarea):

- Para todo conjunto A, B, C: (1) $A \sim A$; (2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$; (3) $A \sim B, B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.
- $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (el conjunto de numeros naturales pares); $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (el conjunto de los números reales positivos); cualquer dos intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ son equivalentes; $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z}$.
- Para todo conjunto A, $P(A)$ no es equivalente a A ("el teorema de Cantor"). Conclusión: hay conjuntos infinitos no numerables (como $P(\mathbb{N})$).

Problemas

1. (a) Demuestra que una función es biyectiva si y solo si es invertible; o sea, $f : A \to B$ es biyectiva si y solo si tiene una inversa $g : B \to A$.

   (b) Demuestra que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 1$ es biyectiva, y encuentra su inversa.

   Sugerencia: es suficiente encontrar una inversa. Según el incisio anterior esto demuestra que la función es biyectiva.

   (c) Demuestra que si una función es invertible entonces su inversa es única; o sea, si $f : A \to B$ es una función con inversas $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$, entonces $g_1 = g_2$.

   Sugerencia: por definición, $g_1 = g_2$ si $g_1(y) = g_2(y)\ \forall y \in B$.

   Notación: debido a este ejercicio, se habla de *la* inversa de una función (cuando existe) y se denota por f^{-1} ("f a la menos uno").

2. (a) Demuestra que una función $f : A \to B$ es inyectiva si y solo si existe una $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ ("inversa por la izquierda").

   Sugerencia: si f es inyectiva y $y \in B$, define $g(y)$ dividiendo en dos casos: si $y \in f(A)$ (ver la última definición arriba) entonces existe un *único* x tal que $y = f(x)$ y se define $g(y) = x$. Si $y \notin f(A)$ se define $g(y) = x_0$ donde $x_0 \in A$ es un elemento arbitrario. No se te olvide demostrar la otra dirección.

   (b) Da un ejemplo de una función con dos distintas "inversas por la izquierda"; o sea, encuentra dos conjuntos A y B, una función $f : A \to B$ y dos funciones *distintas* $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$ que cumplen $g_1 \circ f = g_2 \circ f = 1_A$.

   Sugerencia: hacer un dibujo.

   (c) Demuestra que una función $f : A \to B$ es suprayectiva si y solo si existe una $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$ ("f es invertible por la derecha").

   (d) Da un ejemplo de una función con dos distintas "inversas por la derecha"; o sea, encuentra dos conjuntos A y B, una función $f : A \to B$ y dos funciones *distintas* $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$ que cumplen $f \circ g_1 = f \circ g_2 = 1_B$.

   (e) (Opcional) Sea $f : A \to B$ una función. Demuestra que los siguientes 3 condiciones son equivalentes: (1) f es invertible; (2) toda inversa por la izquierda de f es una inversa; (3) toda inversa por la derecha de f es una inversa.

3. Sea A y B dos conjuntos. Demuestra que existe una función inyectiva $f : A \to B$ si y solo si existe una función suprayectiva $g : B \to A$.

   Sugerencia: se puede usar los ejercicios anteriores pero tambien se puede hacer este problema directamente de las definiciones.

4. (a) Demuestra que si A es finito y $B \sim A$, entonces B tambien es finito y $\#B = \#A$.

   (b) Demuestra que dos conjuntos finitos son equivalentes si y solo si $\#B = \#A$.

   (c) Demuestra que si A es un conjunto finito y $B \subset A$ entonces (1) B tambien es finito, (2) $\#B \leq \#A$, (3) $\#B = \#A$ si y solo si $B = A$, (4) $B \sim A$ si y solo si $B = A$.

5. (a) Demuestra que si A y B son conjuntos finitos entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ tambien son finitos y que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

   (b) (Opcional) Generalizar el inciso anterior para la unión de 3 (o más) conjuntos finitos ("el principio de inclusión-exclusión").