Soluciones de Tarea num. 1

1. Sean A, B, C tres subconjuntos de un conjunto X. Demuestra los siguientes incisos:

   (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   Demostración: Demostramos que el conjunto de la izquiera es un subconjunto del conjunto de la derecha y vice versa. Si $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A, x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, x \in C$. Como $x \in A, x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$; y como $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$. Así que $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Si $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B), x \in C \Rightarrow x \in A, x \in B$. Como $x \in B, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$; y como $x \in A \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$. Así que $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$. $\square$

   Una manera alternativa (mas concisa) de escribir esta demostración:
   $A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \cap C\} = \{x \mid x \in A, x \in B \text{ y } x \in C\} = \{x \mid x \in A \cap B \text{ y } x \in C\} = (A \cap B) \cap C$. $\square$

   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Demostración: $A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \cup C\} = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \text{ ó } C\} = \{x \mid x \in A \text{ y } B, \text{ ó } x \in A \text{ y } C\} = \{x \mid x \in A \cap B \text{ ó } x \in A \cap C\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\square$

   (d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

   Demostración: $X \setminus (A \cup B) = \{x \in X \mid x \notin A \cup B\} = \{x \in X \mid x \notin A \text{ y } x \notin B\} = \{x \in X \mid x \in X \setminus A \text{ y } x \in X \setminus B\} = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. $\square$

   (f) (Opcional). Sean $A_1, A_2, \ldots$ una familia de subconjuntos de X. Demuestra que

   $$X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i),$$

   y que

   $$X \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

   Demostración: $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \{x \in X \mid x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \{x \in X \mid x \notin A_i, i = 1, 2, 3, \ldots\} = \{x \in X \mid x \in X \setminus A_i, i = 1, 2, 3, \ldots\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$.

   $X \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \{x \in X \mid x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\} = \{x \in X \mid x \notin A_i, \text{ para algún } i = 1, 2, 3, \ldots\} = \{x \in X \mid x \in X \setminus A_i, \text{ para algún } i = 1, 2, 3, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$. $\square$

2. Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 7.5\}$.

   Respuesta: Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$. Así que si $x^2 < 7.5 \Rightarrow x^2 \in \{0, 1, 4\} \Rightarrow x \in \{0, 1, -1, 2, -2\} \Rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 7.5\} \subset \{0, 1, -1, 2, -2\}$. Por otro lado para cada $x \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$ tenemos que $x^2 \leq 4 < 7.5 \Rightarrow \{0, 1, -1, 2, -2\} \subset \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 7.5\}$. $\square$

   (b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$

Respuesta: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5 \text{ y } x > -5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 1\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$. $\square$

(c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$

Respuesta: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5 \text{ ó } x > -5\} = \mathbb{Z}$. $\square$

(g) $\{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$

Respuesta: Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) := x^2 + x + 1$. Entonces $\{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\} = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 3, 7\}$. $\square$

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 4\}$. Encuentra todos los elementos de $P_0(A)$, $P_1(A)$, $P_2(A)$, $P_3(A)$, $P_4(A)$, $P(A)$.

Respuesta: $P_0(A) = \{\emptyset\}$, $P_1(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{3\}\}$, $P_2(A) = \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$, $P_3(A) = \{A\}$, $P_4(A) = \emptyset$, $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, A\}$. $\square$

(b) Encuentra los elementos de $P(P(\emptyset))$.

Respuesta: $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(c) Encuentra un conjunto A tal que $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(A) \neq P(A)$.

Respuesta: Esto sucede para cualquer conjunto *infinito*. Por ejemplo para el conjunto $A = \mathbb{N}$. En este caso $A \notin P_k(A)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ya que todos los elementos de estos son subconjuntos *finitos* de A, por lo que $A \notin \bigcup_{k=0} P_k(A)$. Por otro lado $A \subset A \Rightarrow A \in P(A)$. Así que $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(A) \neq P(A)$. $\square$