

Algebra Lineal 1 – Tarea num. 1

(Por entregar el viernes, 15 de agsto, 2003)

Notación:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (los números naturales. Ojo: hay libros en donde 0 no está incluido en los números naturales).
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ (los enteros).
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ (los racionales).

1. Sean A, B, C tres subconjuntos de un conjunto X . Demuestra los siguientes incisos:

- (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
- (e) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
- (f) (Opcional). Sean A_1, A_2, \dots una familia de subconjuntos de X . Demuestra que

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i),$$

y que

$$X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

Nota: los últimos 3 incisos se llaman a veces “las leyes de De Morgan”.

2. Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos

- (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 7.5\}$.
- (b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1.5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$
- (d) $\{x^2 \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$
- (e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$
- (f) $\{x^2 \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$
- (g) $\{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$
- (h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$
- (i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\}$
- (j) (Opcional) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in \mathbb{Z}\}$

3. Para un conjunto A y un número natural $k \in \mathbb{N}$ definimos $P_k(A) = \{B \subset A \mid \#B = k\}$ (el conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos). También definimos $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$.

- (a) Sea $A = \{2, 3, 4\}$. Encuentra todos los elementos de $P_0(A), P_1(A), P_2(A), P_3(A), P_4(A), P(A)$.
- (b) Encuentra los elementos de $P(P(\emptyset))$.
- (c) Encuentra un conjunto A tal que $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(A) \neq P(A)$.