Algebra Lineal 1, agsto-dic, 2003.

Material para el examen parcial num 2

Definiciones

Campo, espacio vectorial sobre un campo, subespacio de un espacio vectorial, combinación lineal, conjunto linealmente independiente, conjunto generador, base de un espacio vectorial, espacio vectorial de dimensión finita, la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita, las coordenadas de un vector en un espacio vectorial con respecto a una base, transformación lineal, kernel e imagen de una tranformación lineal, la nulidad y el rango de una transformación lineal, multiplicación de matricies, matriz invertible.

Nota: todos los espacios en los teoremas y problemas abajo son de dimensión finita sobre un campo F.

Teoremas

1. Todas las bases en un espacio vectorial (de dimensión finita) tienen el mismo número de elementos.
2. Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal entonces la dimensión de V es la suma de la nulidad y el rango de T ($\dim V = \dim \mathrm{Ker} T + \dim \mathrm{Im} T$).

Problemas

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con dos bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, tal que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v'_i$, $j = 1, \ldots, n$, donde los a_{ij} son escalares en F.
   (a) Expresa las coordenas de un vector $v \in V$ con respecto a la base B' en términos de sus coordenas con respecto a la base B y los escalares a_{ij}.
   (b) Demuestra que la matriz de cambio de base $A = (a_{ij})$ es invertible.
2. Sean V, W dos espacios vectoriales y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Demuestra que para cada n vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$ existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.
3. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales. Demuestra que
   (a) $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ son sub-espacios vectoriales de V.
   (b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.
4. Si $W \subset V$ es un subespacio entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.

5. Para una transformación lineal $T : V \to V$ los siguientes incisos son equivalentes:
   (a) T es invertible.
   (b) T es inyectiva.
   (c) T es suprayectiva.

6. Sean V y W dos espacios vectoriales de la misma dimensión (sobre el mismo campo). Demuestra que V y W son isomorfos.

7. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado $\leq n$.
   (a) Encuentra la dimensión de V.
   (b) Fijamos $n+1$ números reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Demuestra que para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ existe un único $p_i \in V$ tal que $p_i(x_i) = 1$ y $p_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$.
   (c) Demuestra que el conjunto $\{p_0, \ldots, p_n\}$ del inciso anterior es una base de V.
   (d) Encuentra las coordenadas de un elemento $p \in V$ con respecto a la base del inciso anterior.

8. Demuestra que una matriz de 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$. En caso que sea invertible encuentra su inversa.

9. Demuestra que espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de dimensión infinita sobre el campo $\mathbb{R}$.

10. Consideramos al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (con las operaciones usuales).
    (a) Demuestra que la dimensión de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ es 2.
    (b) Sea $w = a + ib \in \mathbb{C}$ y consideramos la transformación lineal $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que manda un número complejo z al número wz. Encuentra la matriz de T con respecto a la base $\{1, i\}$.
    (c) Demuestra que $T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2}$.