Algebra lineal 1, FAMAT

Soluciones al Examen Final

Nota: *Todos los espacios vectoriales en este examen son de dimensión finita.*

1. Hay que responder "Ciertoíncisos abajo, y luego dar una explicación *breve* (1-2 frases, no se requiere demostración detallada).

   (a) Toda transformación lineal suprayectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es injectiva.

   $\triangleright$ Cierto: T sobre $\Longrightarrow dim(Im(T)) = 3 \implies dim(Ker(T)) = 3 - 3 = 0 \implies T$ es inyectiva. $\triangleleft$

   (b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal suprayectiva. Entonces la transpuesta de T es injectiva.

   $\triangleright$ Cierto: T suprayectiva $\implies Im(T) = W \implies Ker(T^t) = [Im(T)]^0 = W^0 = \{0\}$. $\triangleleft$

   (c) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $T(1, 0) = (0, 1)$, $T(1, 1) = (0, 7)$.

   $\triangleright$ Cierto: segun un teorema visto en clase, como $\{(1, 0), (1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, existe una única transformación lineal que asigna a los elementos de base valores dados. $\triangleleft$

   (d) Un sistema arbitrario de ecuaciones lineales (homogeneo o no) con mas incognitas que ecuaciones siempre tiene una solución.

   $\triangleright$ Falso: por ejemplo, $0x + 0y = 1$ no tiene solución (una ecuación inhomogenia con dos incognitas). $\triangleleft$

   (e) Si un sistema de ecuaciones lineales (homogeneo o no) tiene una solución, entonces esta solución es única.

   $\triangleright$ Falso: $0x = 0$ (una ecuación homogenea con un incognita) tiene como soluciones todos los elemntos del campo (por lo menos dos elementos, 0 y 1). $\triangleleft$

   (f) Cada subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

   $\triangleright$ Cierto: si $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ es un conjunto numerable, entonces un subconjunto infinito es de la forma $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$, donde $0 < i_1 < i_2 < \ldots$ son números naturales, así que $k \mapsto a_{i_k}$ define una biyección entre $\mathbb{N}$ y B. $\triangleleft$

   (g) El conjunto potencia de $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) es numerable.

   $\triangleright$ Falso: segun el teorema de Cantor no existe una biyección entre un conjunto y su conjunto potencia. $\triangleleft$

   (h) Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V sobre un campo F. Entonces existe otro subespacio $W' \subset V$ tal $W + W' = V$ y $W \cap W' = \{0\}$.

   $\triangleright$ Verdadero: si $W = V$ tomamos $W' = \{0\}$. Si no, sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de W y lo completamos a una base de V, $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Tomamos como $W\mathfrak{sp}/$ el espacio generado por $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. $\triangleleft$

(i) La intersección de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es también un subespacio vectorial.

$\triangleright$ Cierto: si W, W' son dos subespacios de un espacio vectorial sobre un campo F, $w_1, w_2 \in W \cap W'$ $\implies w_1, w_2 \in W,\ w_1, w_2 \in W' \implies w_1 + w_2 \in W,\ w_1 + w_2 W'$ (por ser W, W' subespacios) $\implies$ $w_1 + w_2 \in W \cap W'$. Si $w \in W \cap W'$, $c \in F \implies w \in W,\ w \in W' \implies cw \in W,\ cw \in W'$ (por ser W, W' subespacios) $\implies cwW \cap W'$. $\triangleleft$

(j) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo kernel está generado por $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$ y su imagen generado por $\{(0,1,1),(0,0,1)\}$.

$\triangleright$ falso: los vectores $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$ son linealmente independientes así que generan un subespacio de dimensión 2. Lo mismo con el los vectores $\{(0,1,1),(0,0,1)\}$. Así que T tendría nulidad=rango=3, lo cual contradice la fórmula nulidad + rango = dim(dominio), ya que $2 + 2 \neq 3$. $\triangleleft$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $T(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$.

(a) Demuestra que T es una transformación lineal.

$\triangleright$ Esto significa que $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ y que $T(cv) = cT(v)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^3$. Esto se puede verificar facilmente usando la definición de T pero le ofrecemos una demostración indirecta:

Sea e_1, e_2, e_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces $T(v) = f_1(v)e_1 + f_2(v)e_2 + f_3(v)e_3$, donde $f_1(v) = y - z$, $f_2(v) = z - x$, $f_3(v) = x - y$. Cada uno de f_1, f_2, f_3 es un funcional lineal ya que es una combinación lineal de los funcionales lineales x, y, z (los elementos de la base dual a la base canónica).

Ahora demostramos que si $f \in V^*$ es un funcional lineal en un espacio vectorial V y $e \in V$ entonces la función $T : V \to V$ dada por $T(v) = f(v)e$ es una transformación lineal: $T(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2)e = [f(v_1) + f(v_2)]e = f(v_1)e + f(v_2)e = T(v_1) + T(v_2)$, y $T(cv) = f(cv)e = [cf(v)]e = c[f(v)e] = cT(v)$.

Esto demuestra que nuestra T es una suma de tranfomaciones lineales, por lo cual es una transformación lineal. $\triangleleft$

(b) Encuentra la matriz que representa a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ $T(e_1) = T(1,0,0) = (0,-1,1) = -e_2 + e_3$, $T(e_2) = T(0,1,0) = (1,0,-1) = e_1 - e_3$, $T(e_3) = T(0,0,1) = (-1,1,0) = -e_1 + e_2$, así que la matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Demuestra que $B = \{(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleright$ Sean $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (1,0,-1)$. Como $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3 y B tiene 3 elementos basta demostrar B es linealmente independiente o generador (cualquera implica el otro). Demostramos el segundo (que es generador). Tenemos que $e_1 = (v_1 + v_2 + v_3)/3$, $e_2 = (v_1 - 2v_2 + v_3)/3$, $e_3 = (v_1 + v_2 - 2v_3)/3$, así que los elementos de la base canónica estan en el subespacio generado por B, por lo cual B es un conjunto generador.

$\triangleleft$

(d) Encuentra la base dual a la base B del inciso anterior.

$\triangleright$ Sea v_1^*, v_2^*, v_3^* la base dual a B. Usando las fórmulas para e_1, e_2, e_3 del inciso anterior y la propiedad $\langle v_i^*, v_j\rangle = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned}\langle v_1^*, (x,y,z)\rangle &= x\langle v_1^*, e_1\rangle + y\langle v_1^*, e_2\rangle + z\langle v_1^*, e_3\rangle = \\ &= x\langle v_1^*, (v_1+v_2+v_3)/3\rangle + y\langle v_1^*, (v_1-2v_2+v_3)/3\rangle + z\langle v_1^*, (v_1+v_2-2v_3)/3\rangle = \\ &= x/3 + y/3 + z/3,\end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\begin{aligned}\langle v_2^*, (x,y,z)\rangle &= x/3 - 2y/3 + z/3, \\ \langle v_3^*, (x,y,z)\rangle &= x/3 + y/3 - 2z/3.\end{aligned}$$

$\triangleleft$

(e) Encuentra la matriz de T con respecto a la base B.

$\triangleright$ $T(v_1) = T(1,1,1) = (0,0,0)$, $T(v_2) = (-1,-1,2) = v_2 - 2v_3$, $T(v_3) = (1,-2,1) = 2v_2 - v_3$, así que la mazriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(f) Encuentra bases para el kernel y la imagen de T. $\triangleright$ $v_1 = (1,1,1)$ está en el kernel así que la nulidad es por lo menos 1. Los vectores $T(e_1) = (0,-1,1)$ y $T(e_2) = (1,0,-1)$ son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro) así que el rango por lo menos 2. Pero rango+nulidad=3 así que la nulidad=1 y el rango=2. Así que v_1 es una base para el kernel y $T(e_1), T(e_2)$ base para la imagen. $\triangleleft$

(g) Encuentra una base para el anulador del kernel de T.

$\triangleright$ v_2^*, v_3^* (son linealmente independiente y anulan a v_1, por definición).

3. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestra que $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$.

$\triangleright$ Escojimos una base $v_1, \dots, v_k$ para el kernel de T y la completamos a una base de V, digamos $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$. Tenemos que demostrar entonces que $Im(T)$ tiene dimension $n-k$. Para esto, demostramos que los $n-k$ vectores $Tv_{k+1}, \dots, Tv_n$ forman una base de la imagen de T. Es claro que son vectores de la imagen. Si $w \in Im(T)$ entonces $w = Tv$ para algun $v \in V$. Escribimos $v = \sum c_i v_i$, así que $w = T(\sum c_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i) = \sum_{i=k+1}^n c_i T(v_i)$, ya que $Tv_1 = \ldots = Tv_k = 0$. Esto demuestra que $Tv_{k+1}, \dots, Tv_n$ genera la imagen. Si $\sum_{i=k+1}^n c_i T(v_i) = 0$ entonces $T(\sum_{i=k+1}^n c_i v_i) = 0$ así que $\sum_{i=k+1}^n c_i v_i$ está en el kernel de T, por lo cual es una c.l. de $v_1, \dots, v_k$. Esto implica que $c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$, ya que $v_1, \dots, v_n$ es un conjunto l.i. $\triangleleft$