Algebra Lineal 1, agsto-dic, 2003.

La definición de sub-espacio vectorial

La definición de "subespacio vectorial" que dimos en la clase de Jueves (18 sept 2003) es ligeramente diferente de la del libro del curso. Aquí está nuestra definición:

Definición. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Un subconjunto $W \subset V$ es un* sub-espacio vectorial *si*

1. $\mathbf{0} \in W$,
2. $w_1, w_2 \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$,
3. $c \in F,\ w \in W \Rightarrow cw \in W$.

Proposición. *Sea V un espacio vectorial sobre F, con operaciones $s : V \times V \to V$ y $m : F \times V \to V$ de suma de vectores y multiplicacion por escalar, respectivamente. Sea W un subespacio vectorial de V. Definimos las siguientes operaciones de suma de vectores $s' : W \times W \to W$ y multiplicación por escalar $m' : F \times W \to W$ en W:*

- $s'(w_1, w_2) := s(w_1, w_2)$*, para todo* $w_1, w_2 \in W$*;*
- $m'(c, w) := m(c, w)$*, para todo* $w \in W$*,* $c \in F$*.*

Entonces, con estas operaciones, W es un espacio vectorial, cuyo vector nulo es el vector nulo de V.

Demostración. La defininción de subespacio vectorial implica que s' y m' estan *bien definidos*; o sea que $s'(w_1, w_2), m'(c, w) \in W$, para todo $w, w_1, w_2 \in W$, $c \in F$. El hecho que estas operaciones satisfacen las 8 axiomas de espacio vectorial sigue facilmente del hecho que las operaciones en V lo satisfacen. Por ejemplo, para demostrar el axioma 1 (comutatividad de la suma de vectores en W) tenemos que demostrar que $s'(w_1, w_2) = s'(w_2, w_1)$, para todo $w_1, w_2 \in W$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} s'(w_1, w_2) &= s(w_1, w_2) && \text{por la definición de } s' \\ &= s(w_2, w_1) && \text{porque } s \text{ satisface el Ax. 1} \\ &= s'(w_2, w_1) && \text{por la definición de } s'. \end{aligned}$$

De manera similar se demuestran las otras 7 axiomas. □

Notas:

1. La demostración de esta proposición es esencialmente trivial. Sin embargo, muchos alumnos la encuentran confusa. ¿Porqué? Mi teoriá es la siguiente: porque la demostración, apesar de ser matemáticamente trivial es muy abstracta y formal, la que la devuelve sicologicamente poco trivial; o sea, la proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones (espacio vectorial, sub-espacio vectorial), pero los alumnos no estan acostumbrados a tomar definiciones muy en serio...

2. A pesar de ser esencialmente trivial, esta proposición es conceptualmente muy importante en la teoría: nos permite facilmente generar una gran cantidad de ejemplos de espacios vectoriales interesantes, como sub-espacios vectoriales de otros espacios vectoriales (menos interesantes). De hecho, no conozco ni un ejemplo de sub=espacio vectorial en donde no es muy facil verificar las 3 propiedades que aparecen en la definición de sub-espacio vectorial.