MATERIAL PARA EL EXAMEN FINAL – ALGEBRA LINEAL 1

Definiciones

Campo, espacio vectorial sobre un campo, subespacio de un espacio vectorial, combinación lineal, conjunto linealmente independiente, conjunto generador, base de un espacio vectorial, espacio vectorial de dimensión finita, la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita, las coordenadas de un vector en un espacio vectorial con respecto a una base, transformación lineal, kernel e imagen de una tranformación lineal, la nulidad y el rango de una transformación lineal, la matriz de una tranformación lineal con respecto a bases en su dominio y codominio, isomorfismo entre espacios vectoriales, espacios vectoriales isomorfos, una funcional lineal en un espacio vectorial, el espacio dual de un espacio vectorial, la base dual de una base en un espacio vectorial, el anulador de un sub-espacio de un espacio vectorial, la transpuesta de una transformación lineal, la transpuesta de una matriz, equivalencia y equivalencia por filas de dos sistemas de ecuaciones lineales, una función determinante, el determinante de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita.

Teoremas

Nota: todos los espacios en los teoremas y problemas abajo son de dimensión finita sobre un campo F (a menos que esté mencionada otra cosa).

1. Todas las bases en un espacio vectorial (de dimensión finita) tienen el mismo número de elementos.
2. Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal entonces la dimensión de V es la suma de la nulidad y el rango de T.
3. Si V es un espacio vectorial entonces el mapa $c : V \to V^{**}$, $(c(v), \alpha) := (\alpha, v)$, es un isomorfismo (el "isomorfismo canónico").
4. Si $W \subset V$ es un sub espacio de un espacio vectorial, entonces $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0)$.
5. Para toda transformación lineal T, $[\mathrm{Ker}(T)]^0 = \mathrm{Im}(T^t)$.
6. Si A, B son transformaciones lineales $V \to V$ entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

7. Una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Problemas

1. Sea $W \subset V$ un subespacio de un espacio vectorial. Demuestra que $(W^0)^0 = c(W)$, donde $c : V \to V^{**}$ es el isomorfismo canónico.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con dos bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, tal que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v'_i$, $j = 1, \ldots, n$, donde los a_{ij} son escalares en F.
   (a) Expresa las coordenas de un vector $v \in V$ con respecto a la base B' en términos de sus coordenas con respecto a la base B y los escalares a_{ij}.
   (b) Demuestra que la matriz de cambio de base $A = (a_{ij})$ es invertible.
   (c) Expresa la matriz de una transformación lineal $T : V \to V$ con respecto a B' en términos de la matriz de T con respecto a B y la matriz de cambio de base $A = (a_{ij})$.
3. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales y A la matriz que representa a T con respecto a bases en V y W. Entonces la matriz que representa a la transpuesta de T, con respecto a las bases duales, es la transpuesta de A.
4. Sea $C \subset V^*$ un conjunto de funcionales lineales en un espacio vectorial V. Sea $W = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0, \text{ para todo } \alpha \in C\}$. Demuestra que el conjunto C genera a W^0.
5. Sean V, W dos espacios vectoriales y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Demuestra que para cada n vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$ existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.
6. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales. Demuestra que
   (a) $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ son sub-espacios vectoriales de V.
   (b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.
7. Considera un sistema de m ecuaciones lineales no-homogeneas con $m+k$ incognitas, $\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, tal que las m filas de la matriz de coeficientes (a_{ij}) son linealmente independientes y $(b_1, \ldots, b_m) \neq 0$. Demuestra que existen $k+1$ vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_{k+1} \in F^{m+k}$ tal que $v \in F^{m+k}$ es una solución del sistema si y sólo si es de la forma $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k + v_{k+1}$, donde las $c_1, \ldots, c_k$ son escalares arbitrarios en F.
8. En cualquier matriz A, el máximo número de filas de A que son linealmente independientes (el “rango de filas” de A) es igual al

máximo número de columnas de A que son linealmente independientes (el "rango de columnas" de A).

9. Si $W \subset V$ es un subespacio entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.
10. Demuestra que el rango de una tranformación lineal T es igual a rango de su transpuesta.
11. Para una transformación lineal $T : V \to V$ los siguientes incisos son equivalentes:
    (a) T es invertible.
    (b) T es inyectiva.
    (c) T es suprayectiva.
    (d) Si A es la matriz de T con respecto a una base de V entonces $\det(A) \neq 0$.
    (e) T^2 es invertible.
    (f) T^t es invertible.
12. Sean $S : V \to W$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Demuestra que los siguientes incisos son equivalentes
    (a) Existe bases $B_1, B_1' \subset V$ y $B_2, B_2' \subset W$ tal que $[T]_{B_1,B_2} = [S]_{B_1',B_2'}$.
    (b) Existen transformaciones lineales invertibles $P : V \to V$ y $Q : W \to W$ tal que $QT = SP$.
    (c) T y S tienen el mismo rango.
13. Sean V y W dos espacios vectoriales de la misma dimensión (sobre el mismo campo). Demuestra que V y W son isomorfos.
14. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado $\leq n$.
    (a) Encuentra la dimensión de V.
    (b) Encuentra el kernel y la imagen de la transformación lineal $D : V \to V$ que manda un polinomio en V a su derivada.
    (c) Escribe la matriz de D con respecto a tu base favorita de V.
    (d) Repite los dos incisos anteriores para la transformación lineal $T_a : V \to V$ que manda un polinomio $p(x)$ al polinomo $p(x + a)$, donde $a \in \mathbb{R}$.
    (e) Repite los incisos (b) y (c) para la transformación lineal $V \to V$ que manda un polinomio $p(x)$ al polinomo $q(x) = \int_x^{x+1} p(t)dt$. (Hay que demostrar también que $q(x)$ es un elemento de V).
    (f) Fijamos $n + 1$ números reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Demuestra que para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ existe un único $p_i \in V$ tal que $p_i(x_i) = 1$ y $p_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$.
    (g) Demuestra que el conjunto $\{p_0, \ldots, p_n\}$ del inciso anterior es una base de V.
    (h) Encuentra las coordenadas de un elemento $p \in V$ con respecto a la base del inciso anterior.

15. Demuestra que una matriz de 2×2
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
es invertible si y sólo si $\det(A) = ad - bc \neq 0$. En caso que sea invertible encuentra su inversa.
16. Demuestra que espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de dimensión infinita sobre el campo $\mathbb{R}$.
17. Consideramos al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (con las operaciones usuales).
    (a) Demuestra que la dimensión de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ es 2.
    (b) Sea $w = a + ib \in \mathbb{C}$ y consideramos la transformación lineal $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que manda un número complejo z al número wz. Encuentra la matriz de T con respecto a la base $\{1, i\}$.
    (c) Demuestra que $T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2}$.
18. Se dice que dos transformaciones lineales $T, S : V \to V$ son similares si existe un isomorfismo $P : V \to V$ tal que $T = PSP^{-1}$. Demuestra que
    (a) Similitud es una relación de equivalencia (reflexiva, simetrica, transitiva).
    (b) T y S son similares si y sólo si existen bases B y B' de V tal que $[T]_B = [S]_{B'}$ (o sea, T y S tienen la misma matriz, con respecto a las bases B y B' resp.)
19. Sean $\alpha, \alpha' \in V^*$ dos funcionales lineales en un espacio vectorial V tal que $\alpha(v) = 0$ si y sólo si $\alpha'(v) = 0$ para todo $v \in V$. Demuestra que existe un $c \in F$ tal que $\alpha = c\alpha'$.
20. Demuestra que el determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$
es $\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$ (el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$, donde $0 \leq i < j \leq n$).

    Por ejemplo, para $n = 2$,
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0).$$