Álgebra Lineal I: Examen Parcial núm. 3
Soluciones

1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo F.

(a) Define: $T : V \to W$ es una transformación lineal.

Solución. $T : V \to W$ es una tranformación lineal si $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in V$, y $T(cv) = cT(v))$ para todo $c \in F$, $v \in V$.

(b) Define: $B \subset V$ es una base de V.

Solución. $B \subset V$ es una base de V si B es un conjunto (1) generador (todo $v \in V$ es una combinación lienal de elementos de B) y (2) linealmente independiente.

(c) Demuestra: si $B \subset V$ es una base finita con n elementos, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, y $w_1, \ldots, w_n$ son n elementos arbitrarios de W, entonces existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(e_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Solución. Como B es una base, cada $v \in V$ se puede expresar, de manera única, como una combinación lineal de los elementos de B; o sea, dado un $v \in V$, existen n escalares $c_1, \ldots, c_n$ (únicamente determinados por v), tal que $v = \sum_{j=1}^n c_j e_j$. Definimos $T(v) := \sum_{j=1}^n c_j w_j$. Como los c_j estan determinados por v, T está bien definida. Veremos ahora que $T(e_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$: para cada par de enteros i, j, $1 \leq i, j \leq n$, definimos a $\delta_{ij} := 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} := 0$ si $i \neq j$. Entonces para todo $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $e_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} e_j$. Así que, según la definición de T, $T(e_i) = \delta_{ij} w_j = w_i$. Veremos ahora que T es lineal: sean $v, v' \in V$, con $v = \sum_{j=1}^n c_j e_j$, $v' = \sum_{j=1}^n c'_j e_j$. Entonces

$$
\begin{array}{rcll}
T(v + v') & = & T([\sum_{j=1}^n c_j e_j] + [\sum_{j=1}^n c'_j e_j]) & \\
& = & T(\sum_{j=1}^n (c_j + c'_j) e_j) & \text{(usando las axiomas de espacio vectorial en } V) \\
& = & \sum_{j=1}^n (c_j + c'_j) w_j & \text{(por la definición de } T) \\
& = & \sum_{j=1}^n c_j w_j + \sum_{j=1}^n c'_j w_j & \text{(usando las axiomas de espacio vectorial en } V) \\
& = & T(v) + T(v') & \text{(por la definición de } T).
\end{array}
$$

Veremos ahora que T es la única transformación lineal entre V y W que satisface $T(e_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Si $S : V \to W$ es una transformación lineal entre V y W que satisface $S(e_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $v \in V$, entonces existen n escalares $c_1, \ldots, c_n$ tal que $v = \sum_{j=1}^n c_j e_j$. Tenemos entonces que por la lienalidad de S, $S(v) = S(\sum_{j=1}^n c_j e_j) = \sum_{j=1}^n c_j S(e_j) = \sum_{j=1}^n c_j w_j = T(v)$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F.

(a) Define: V es de dimensión finita.

Solución. V es de dimensión finita si existe en V una base con un número finito de elementos.

(b) Demuestra: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es una transformación lineal, entonces T es inyectiva si y solo si es suprayectiva.

Solución. Sea $d = dim(V)$, $n = dim(Ker(T))$ y $r = dim(Im(T))$. Entonces según una fórmula vista en clase, $d = n + r$. Si T es injectiva entonces $Ker(T) = \{0\}$, así que $n = 0$. Esto implica que $r = n - 0 = n$. Así que la imagen de T es un subespacio de V con la misma dimensión como V, así que debe coincidir con V. Si T es suprayectiva, entonces $Im(T) = V$, así que $r = n$ y la fórmula implica $n = 0$, así que $Ker(T) = \{0\}$. Demostramos ahora que esto implica que T es inyectiva: si $T(v) = T(v')$ para dos elementos $v, v' \in V$, entonces por la linealidad de T, $0 = Tv - Tv' = T(v - v')$, así que $v - v' \in Ker(T) = \{0\}$, así que $v - v' = 0$, o sea $v = v'$.

(c) Dar un ejemplo que muestra que el inciso anterior es falso si no suponemos que V tiene dimensión finita.

Solución. Sea $X := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ y sea V el espacio de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ con la estructura usual de espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$). Sea $T : V \to V$ definida por $T(f)(x) = f(x+1)$, para todo $x \in X$. Si $x \geq 0$ entonces $x + 1 \geq 0$, así que T esta buen definida. Veremos que T es lineal: si $f, g \in V$ entonces para todo $x \in X$, $T(f+g)(x) = (f+g)(x+1) = f(x+1)+g(x+1) = T(f)(x) + T(g)(x) = [T(f) + T(g)](x)$, así que $T(f + g)T(f) + T(g)$. Si $f \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces para todo $x \in X$, $T(cf)(x) = (cf)(x + 1) = c[f(x + 1)] = c[T(f)(x)] = [c(T(f))](x)$, así que $T(cf) = cT(f)$. Veremos que T es suprayectiva: si $g \in V$ entonces $g = T(f)$, donde f está definida como $f(x) = g(x-1)$ si $x \geq 1$, $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq 1$. Finalmente, veremeos que T no es injectiva: sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 0$ si $1 \geq x$. Entonces $f \neq 0$, pero $T(f) = 0 = T(0)$.

2 (a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una tranformación lineal cuya matriz, respecto a la base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$, es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar la matriz de T con respecto a la base $\{(1, 0), (1, 1)\}$.

Solución. Denotamos la base canónoca por $B = \{e_1, e_2\}$, es decir $e_1 = \{(1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$. Sea $B' = \{e'_1, e'_2\}$, donde $e'_1 = \{(1, 0),\ e'_2 = (1, 1)\}$. La expresión dada para la matriz de T con respecto a B indica que $T(e_1) = e_2$, $T(e_2) = -e_1$. Esto implica que $T(e'_1) = T(e_1) = e_2 = -e'_1 + e'_2$, $T(e'_2) = T(e_1 + e_2) = T(e_1) + T(e_2) = e_2 - e_1 = (e'_2 - e'_1) - e'_1 = -2e'_1 + e'_2$. Así que la matyriz de T con respecto a B' es

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Encontrar la matriz de T^{2003} (T compuesta con su misma 2003 veces) con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sea A la matriz de T con respecto a la base canónica, como arriba. Entonces A^2003 es la matriz de T^2003. Uno puede verifacr que $A^2 = -I$, done I the matriz identidad (2 por 2). Así que $A^4 = I$. Esto implica que

$$A^{2003} = A^{2000}A^3 = (A^4)^{500}A^2A = -A.$$