Teoría de Conjuntos – Tarea num. 8

(Por entregar el jueves 17 de oct 2002)

Nota: puede ser útil para algunos problemas consultar el libro de Halmos ("Naive Set Theory"), que se encuentra en reserva en la biblioteca.

1. Demuestra que para cualquier cardinal infinito α
   (a) $\alpha + \alpha = \alpha$.
   (b) $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

   Sugerencias: sea A un conjunto con cardinalidad α. En los dos incisos se usa el Lema de Zorn. En (a), sea $X := \{f : B \to B \times \{1,2\} | \, f$ es biyectiva y $B \subset A\}$, con $f_1 \leq f_2$ para $f_1, f_2 \in X$, $f_i : B_i \to B_i \times \{1,2\}$, $i = 1, 2$, ssi $B_1 \subset B_2$ y $f_1(x) = f_2(x)$, para todo $x \in B_1$ ("f_2 es una extensión de f_1"). Se demuestra que un elemento maximal $B_{max} \subset A$ tiene complemento *finito*, porque si no, se puede agregarle a B_{max} un conjunto denumerable (junto con una extension de la biyección), contadiciendo la maximalidad, así que B_{max} tiene la cardinalidad de A (porque la diferencia es un conjunto finito).

   Para (b), se considera el conjunto $X := \{f : B \to B \times B \,|\, B \subset A$ y f es biyectiva$\}$, con $f_1 \leq f_2$ ssi f_2 es una extensión de f_1. Luego se demuestra que un elemento maximal $B_{max} \subset A$ tiene la cardinalidad de A. Para esto se demuestra el siguiente lema: $\alpha + \beta =$max(α, β) para cualquier dos cardinales α, β, tal que uno de ellos por lo menos es infinito. Esto es una consecuencia (fácil) del inciso (a) del problema. De este lema se concluye, que si $|A| > |B_{max}|$ entonces $|A \setminus B_{max}| > |B_{max}|$, y en particular $A \setminus B_{max}$ contiene un subconjunto equivalente a B_{max}. Agregando este conjunto a B_{max} se obtiene una contradicción a la maximalidad de B_{max}.

2. (a) Demuestra que un conjunto totalmente ordenado con n elementos es isomorfo al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con su orden usual.
   (b) (Opcional) Demuestra que un conjunto totalmente ordenado denumerable es isomorfo a un subconjunto de los números racionales con su orden usual.

   Sugerencia para (b): sea $(A, \leq)$ un conjutno totalmete ordenado con $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Se define inductivamente una sucesión de racionales $b_1, b_2, \ldots$ tal que $a_i \leq a_j$ ssi $b_i \leq b_j$. Sea $b_1 = 0$. Suponemos que ya definimos a $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Sean $b_- :=$max$\{b_i | a_i < a_{n+1}\}$, $b_+ :=$min$\{b_i | a_i > a_{n+1}\}$ (si el conjunto que se usa para definir a b_- es vacio se toma $b_- := b_+ - 1$, y algo similar para b_+). Luego se define $b_{n+1} := (b_- + b_+)/2$.

3. Definición: un orden parcial en un conjunto es un *buen-orden* (y el conjunto está *bien-ordenado*) si cada subconjunto tiene un primer elemento. (Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, con el orden usual, está bien-ordenado).
   (a) ¿Existe un ejemplo de un conjunto denumerable bien ordenado que no sea isomorfo a $\mathbb{N}$?
   (b) Demuestra que un conjunto bien ordenada está totalmente ordenado.
   (c) Demuestra que en cualquier conjunto existe un buen-orden.

   Sugerencia para (c): se usa el lema de Zorn. Sea A un conjunto y consideramos al conjunto $X := \{(B, R) \,|\, B \subset A$ y R es un buen-orden en $B\}$, con $(B_1, R_1) \leq (B_2, R_2)$ ssi (1) $B_1 \subset B_2$, (2) para todo $b, b' \in B_1$, bR_1b' ssi bR_2b', (3) para todo $b \in B_1$, $b' \in B_2 \setminus B_1$ se tiene bR_2b'. Luego se demuestra que un subconjunto maximal es necesariamente A.