Variable Compleja I
CIMAT, 21 marzo, 1999

El teorema de Stokes y sus aplicaciones en análisis complejo.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Vamos a definir dos tipos de objetos:

$C_k(U) =$ las $k-$cadenas en U.

$\Omega^k(U) =$ las $k-$formas (diferenciales) en U.

Comentario. Vamos a definir estos objetos aquí solamente para $k = 0, 1, 2$. La extensión para $k > 2$ es relativamente fácil y no presenta ideas esencialmente nuevas. También se puede generalizar fácilmente las construcciones para espacios mas generales que abiertos en $\mathbb{R}^n$, i.e. para variedades diferenciales.

1. Definición de $k-$cadenas

Sea $I^k = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, k\}$ (el cubo unitario en $\mathbb{R}^k$). Además, definimos $I^0 = \{0\}$ (un solo punto.) Una $k-$cadena es una suma formal (finita) $c = \sum_i m_i \sigma_i$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$, y $\sigma_i : I^k \to U$ es una aplicación lisa (C^2 es suficiente para todo lo que hacemos aquí.)

Recordamos que una aplicación lisa $I^k \to U$ es una aplicación (una función) que es la restricción a I^k de una aplicación lisa definida en un abierto que contiene a I^k.

Importante: Para $k > 0$ identificamos (i.e. usamos la relación de equivalencia generada por) $-1 \cdot \sigma \sim -\sigma$, donde $-\sigma$ está definido por:

$\underline{k = 1}$: $-\sigma(t) := \sigma(1 - t)$.

$\underline{k = 2}$: $-\sigma(t_1, t_2) := \sigma(t_2, t_1)$.

Dicho de otra manera, más formal, nuestro espacio de cadenas $C_k(U)$ es el grupo abeliano cociente del grupo de las sumas formales $\sum_i m_i \sigma_i$ modulo el subgrupo generado por los elementos de la forma $\sigma + (-\sigma)$.

Ejercicio 1 *Demostrar que según esta definición una aplicación constante* $\sigma : I^k \to U$, $k = 1, 2$, *se identifica con* 0. *(Sug.:* $-\sigma \sim \sigma$.*)*

2. Definición de $k-$formas

$\underline{k=0}$: funciones (lisas) $f : U \to \mathbb{C}$.

$\underline{k=1}$: fijamos coordenadas (e.g. cartesianas) $x_1, \dots, x_n$ en U. Una 1-forma es una suma formal de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i,$$

donde $f_i : U \to \mathbb{C}$ son funciones lisas.

$\underline{k=2}$: una expresión de la forma

$$\sum_{i \neq j} f_{ij} dx_i dx_j,$$

donde $f_{ij} : U \to \mathbb{C}$ son funciones lisas e identificamos $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$, por lo que la suma puede ser digamos sobre $i < j$. Para enfatizar el caracter exótico (anti-conmutativo) de este producto de 1-formas lo denotamos por $dx_i \wedge dx_j$. Por ejemplo, una 2-forma en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es de la forma $f dx_1 \wedge dx_2$, donde $f : U \to \mathbb{C}$ es lisa.

3. Definición de los operadores d y ∂

$\partial : C_k \to C_{k-1}$, $k \geq 1$, se define por $\partial \left(\sum_i m_i \sigma_i\right) = \sum m_i \left(\partial \sigma_i\right)$, y donde para una aplicación $\sigma : I^k \to U$ se define $\partial\sigma$ de la manera siguiente:

$\underline{k=1}$: $\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$.

$\underline{k=2}$: $\partial\sigma = \sum_{i=1}^{4} \sigma \circ \eta_i$, donde

$$\eta_1(t) = (t, 0),\ \eta_2(t) = (1, t),\ \eta_3(t) = (1-t, 1),\ \eta_4(t) = (0, 1-t),\ t \in [0, 1].$$

Ejercicio 2 *Demostrar que $\partial(-\sigma) = -(\partial\sigma)$, así que ∂ está bien definido como una operación entre cadenas.*

$d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$, $k \geq 0$, se define de la manera siguiente:

$\underline{k=0}$: $df = \sum_i \left(\partial f / \partial x_i\right) dx_i$

$\underline{k=1}$: $d\left(\sum f_i dx_i\right) = \sum df_i \wedge dx_i$.

Ejercicio 3 *Calcular $d\alpha$ para una 1-forma $\alpha = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ en $\mathbb{R}^2$.*

Ejercicio 4 *Sea $\alpha = f\,dz$ una 1-forma en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, donde $dz = dx_1 + i dx_2$ y $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable. Demuestra que $d\alpha = 0$ ssi f es analítica (o holomorfa) en U. Tal 1-forma se llama holomorfa.*

Ejercicio 5 *Demuestra que $\partial \circ \partial = 0$ y $d \circ d = 0$.*

4. Definición de "pull-back" y "push-forward"

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos y $\Phi : V \to U$ una aplicación lisa.

El **"push-forward"** de cadenas por Φ es la aplicación $\Phi_* : C_k(V) \to C_k(U)$ dada por $\Phi_*(\sum m_i \sigma_i) = \sum m_i(\Phi \circ \sigma_i)$.

Ejercicio 6 *Demostrar que $\Phi_*(-\sigma) = -\Phi_*\sigma$, por lo que Φ_* está bien definida.*

El **"pull-back"** de formas por Φ es la aplicación $\Phi^* : \Omega^k(U) \to \Omega^k(V)$ dada por

$\underline{k=0}$: $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

$\underline{k=1}$: $\Phi^*(\sum f_i dx_i) = \sum (f_i \circ \Phi) d(x_i \circ \Phi)$.

Por ejemplo, si $\gamma : I \to U$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, entonces

$$\gamma^*(\sum f_i dx_i) = \sum (f_i \circ \gamma)(d\gamma_i) = \sum (f_i \circ \gamma)(\frac{d\gamma_i}{dt})dt.$$

$\underline{k=2}$: $\Phi^*(\sum f_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \sum (f_{ij} \circ \Phi) d(x_i \circ \Phi) \wedge d(x_j \circ \Phi)$.

Ejercicio 7 *Demuestra que $\Phi^*(dx_j \wedge dx_i) = -\Phi^*(dx_i \wedge dx_j)$, por lo que Φ^* está bien definida.*

Ejercicio 8 *Sea Φ una aplicación entre dos abiertos en $\mathbb{R}^2$, con coordenadas (y_1, y_2) en el dominio de Φ y (x_1, x_2) en el codominio. Demuestra que*

$$\Phi^*(dx_1 \wedge dx_2) = J_\Phi dy_1 \wedge dy_2,$$

donde

$$J_\Phi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}$$

es el Jacobiano de Φ (el determinante de su matriz Jacobiana.) y $\Phi_i = x_i \circ \Phi$.

Ejercicio 9 *Demostrar que*

(a) $(\Phi \circ \Psi)_* = \Phi_* \circ \Psi_*$,	(a^*) $(\Phi \circ \Psi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$
(b) $\Phi_* \partial = \partial \Phi_*$,	(b^*) $\Phi^* d = d\Phi^*$
(c) $(id_U)_* = id_{C_k}$,	(c^*) $(id_U)^* = id_{\Omega^k}$,
	(d^*) $\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^*\omega_1) \wedge (\Phi^*\omega_2)$.

(El inciso (d^*) es para cualesquiera dos formas $\omega_1 \in \Omega^k(U)$, $\omega_2 \in \Omega^l(U)$, tales que $k + l \leq 2$.)

Comentario. Existe también una versión sin estrella del inciso (d*), pero su formulación y demostración es mas sutil y no lo vamos a ver en estas notas.

5. Tres resultados del cálculo integral elemental

En el cálculo integral elemental se define la integral (de Riemann) $\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}$ de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ como el limite de las sumas de Riemann $\sum_i f(t_i)|\Delta t_i|$. Se demuestra lo siguiente:

Teorema I (el "Teorema Fundamental del Cálculo"):

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

para toda función lisa $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Luego, la integral de una función continua de mas de una variable, digamos $\int_R f(t_1,t_2)dt_1dt_2$, donde $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset\mathbb{R}^2$, se define de manera similar, como limite de sumas de Riemann $\sum_i f(z_i)|\Delta R_i|$, asociados con particiones de R en rectángulos ΔR_i, y se demuestra lo siguiente:

Teorema II (el "Teorema de Fubini"):

$$\int_R f(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2,$$

para toda función lisa $f:R\to\mathbb{R}$ en el rectángulo $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset\mathbb{R}^2$. ("La integral no depende del orden en que hacemos la integración".)

Luego, se define la integral sobre conjuntos mas complicados que rectángulos por un proceso de aproximación por rectángulos. Por ejemplo, esto funciona para cualquier abierto U contenido en un compacto contenido en el dominio de la definicíon de una función lisa. Esta última condición es para asegurar que las aproximaciones converjan y que la integral sea finita. En este caso decimos que la función es integrable en U.

Teorema III (cambio de variables en la integral):

Sean $U,V\subset\mathbb{R}^k$ dos abiertos y $\Phi:V\to U$ un "cambio de variable", i.e. un difeomorfismo (una aplicación lisa invertible cuya inversa también es lisa.) Sea $f:U\to\mathbb{R}$ una función lisa e integrable en U. Sean $(x_1,\ldots,x_k)$ y $(y_1,\ldots,y_k)$ coordenadas (digamos cartesianas) en U y V (resp.). Entonces

$$\int_U f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots dx_k = \int_V f(\Phi(y_1,\ldots,y_k))|J_\Phi(y_1,\ldots,y_k)|dy_1\ldots dy_k,$$

donde $J_\Phi = det(\partial\Phi_i/\partial y_j)$ es el Jacobiano de Φ y $\Phi_i = x_i\circ\Phi$.

Ejercicio 10 *Demuestra la siguiente reformulación del Teorema III (para $k = 1, 2$):*

$$\int_{\Phi(U)} \omega = \int_U (\Phi^*\omega)\, signo(J_\Phi),$$

para toda $\omega \in \Omega^k(U)$, donde $signo(J_\Phi) = J_\Phi/|J_\Phi| : U \to \{1, -1\}$ es el signo del Jacobiano de Φ.

Ejercicio 11 *Demuestra que los tres teoremas de esta sección siguen siendo ciertos para funciones f con valores complejos, escribiendo $f = u + iv$ y definiendo $\int f = \int u + i \int v$.*

6. Definición de la integral de formas sobre cadenas

Sea $c = \sum m_i \sigma_i \in C_k(U)$ y $\omega \in \Omega^k(U)$. Definimos

$$\int_c \omega := \sum m_i \int_{I^k} \sigma_i^* \omega,$$

donde la integral $\int_{I^k} \sigma_i^* \omega$ es la integral "vieja" de una $k-$forma en I^k; es decir, el pull-back de ω por una aplicación $\sigma : I^k \to U$ es una $k-$forma en I^k, asíque es de la forma $\sigma^*\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ para una función lisa $f : I^k \to \mathbb{C}$, y definimos

$$\int_\sigma \omega := \int_{I^k} \sigma^*\omega = \int_{I^k} f(x_1 \ldots x_k) dx_1 \ldots dx_k.$$

Para $k = 0$, definimos $\int_\sigma f = f(\sigma(0))$.

Ejercicio 12 *Demostrar que $\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega$, asíque integración sobre cadenas está bien definida.*

Ejercicio 13 *Demostrar que la integral sobre cadenas define una aplicación*

$$\int : C_k(U) \times \Omega^k(U) \to \mathbb{C}$$

que es bilineal en sus dos argumentos (formas y cadenas).

Ejercicio 14 *Demostrar que para* cualquiera *aplicación lisa $\Phi : U \to V$ (no necesariamente un difeomorfismo),*

$$\int_{\Phi_* c} \omega = \int_c \Phi^*\omega.$$

Ejercicio 15 *Sea $\sigma : I^k \to U$ y $\omega \in \Omega^k(U)$. Sea $\tilde{\sigma}$ una "reparametrización" de σ, i.e. $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$, donde $\Phi : I^k \to I^k$ es un difeomorfismo con Jacobiano positivo. Demeustra que*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\tilde{\sigma}} \omega.$$

7. La fórmula de Stokes

Esta es

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega,$$

para toda $\omega \in \Omega^k(U)$ y $c \in C_{k+1}(U)$, $k = 0, 1$.

Demostración: Es suficiente demostrarlo para $c = \sigma : I^{k+1} \to U$, usando la linearidad de la integral en C_k.

$\underline{k = 0}$: Es una reformulacíon del Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_\gamma df = \int_I \gamma^* df = \int_0^1 \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_{\partial\gamma} f.$$

$\underline{k = 1}$: Sea $\sigma : I^2 \to U$ y $\alpha \in \Omega^1(U)$. Entonces

$$\int_{\partial\sigma} \alpha = \sum_{i=1}^4 \int_{\sigma\circ\eta_i} \alpha = \sum_{i=1}^4 \int_I (\sigma \circ \eta_i)^* \alpha = \sum_{i=1}^4 \int_I \eta_i^* (\sigma^*\alpha) = \ldots$$

Ahora escribimos $\tilde{\alpha} := \sigma^*\alpha = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ (recordamos que según nuestra convención σ está definida de hecho en un abierto en R^2 que contiene a I^2, digamos V, asíque $\sigma^*\alpha \in \Omega^1(V)$ y $\eta_i : I \to V$), y calculamos:

$$\eta_1^*(\tilde{\alpha}) = (f_1 \circ \eta_1)dt, \;\; \eta_2^*(\tilde{\alpha}) = (f_2 \circ \eta_2)dt, \;\; \eta_3^*(\tilde{\alpha}) = -(f_1 \circ \eta_3)dt, \;\; \eta_4^*(\tilde{\alpha}) = -(f_2 \circ \eta_4)dt.$$

Ahora podemos continuar:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_I f_1(t,0)dt + \int_I f_2(1,t)dt - \int_I f_1(1-t,1)dt - \int_I f_2(0,1-t)dt = \\
&= \int_0^1 \left[f_2(1,t_2) - f_2(0,t_2)\right] dt_2 - \int_0^1 \left[f_1(t_1,1) - f_1(t_1,0)\right] dt_1 = \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t_1,t_2)dt_1\right] dt_2 - \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t_1,t_2)dt_2\right] dt_1 = \\
&= \int_{I^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1} - \frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right) dt_1 dt_2 = \\
&= \int_{I^2} d\left(\sigma^*\alpha\right) = \int_{I^2} \sigma^*(d\alpha) = \int_\sigma d\alpha.
\end{aligned}$$

Ejercicio 16 *Encuentra para cada una de las igualdades en la última demostración cual fue la definición, resultado de ejercicio anterior o uno de los tres teoremas del cálculo elemental que fueron usados para justificarla.*

Ejercicio 17 *(reto) Demostrar el teorema de Stokes para $k = 2$. (Esto incluye por su puesto extender las definiciónes de cadenas y formas a $k = 3$.)*

Corolario: Si α es una 1-forma cerrada, i.e. $d\alpha = 0$ (por ejemplo $\alpha = f\,dz$ una $1-$forma holomorfa en un $U \subset \mathbb{C}$), entonces

$$\int_{\partial c} \alpha = 0,$$

para toda $c \in \Omega^2(U)$.

Ejercicio 18 *Demuestra que $\int_a \alpha = 0$ para toda forma cerrada α y 1-cadena cerrada a en un disco abierto en $\mathbb{C}$.*